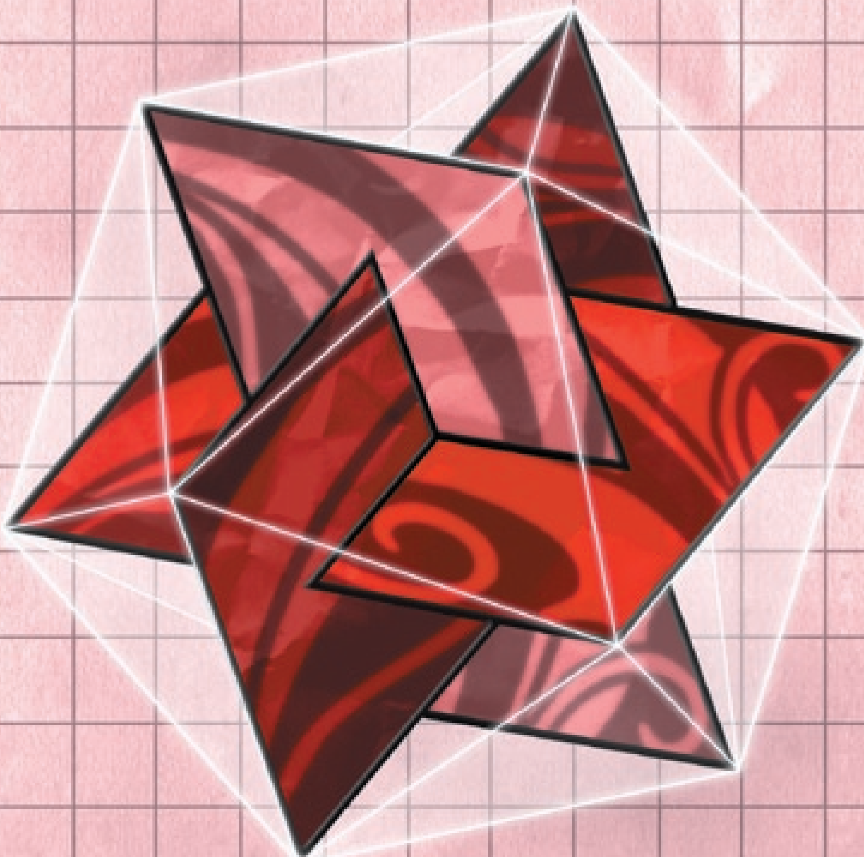
SERIE DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO N° 16

CUERPOS GEOMÉTRICOS



FE Y ALEGRIA

CAF

UNESCO
IESALC

SERIE DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO Nº 16

CUERPOS GEOMÉTRICOS

POR MARTÍN ANDONEGUI ZABALA

372.7
And.
Cuaderno N° 16
Cuerpos Geométricos
Federación Internacional Fe y Alegría,
junio 2007
32 p.; 21,5 x 19 cm.
ISBN: 978-980-6418-93-6
Matemáticas, Geometría

"El educador se forma en el proceso de producir conocimientos y soluciones a los problemas que le plantea su propia práctica, se forma en un hacer consciente y reflexivo sobre su práctica".

Jesús Orbegozo.

EQUIPO EDITORIAL
Beatriz Borjas y Carlos Guédez

Dimensión: Desarrollo del pensamiento matemático
Cuaderno N° 16
Cuerpos Geométricos.
Autor: Martín Andonegui Zabala

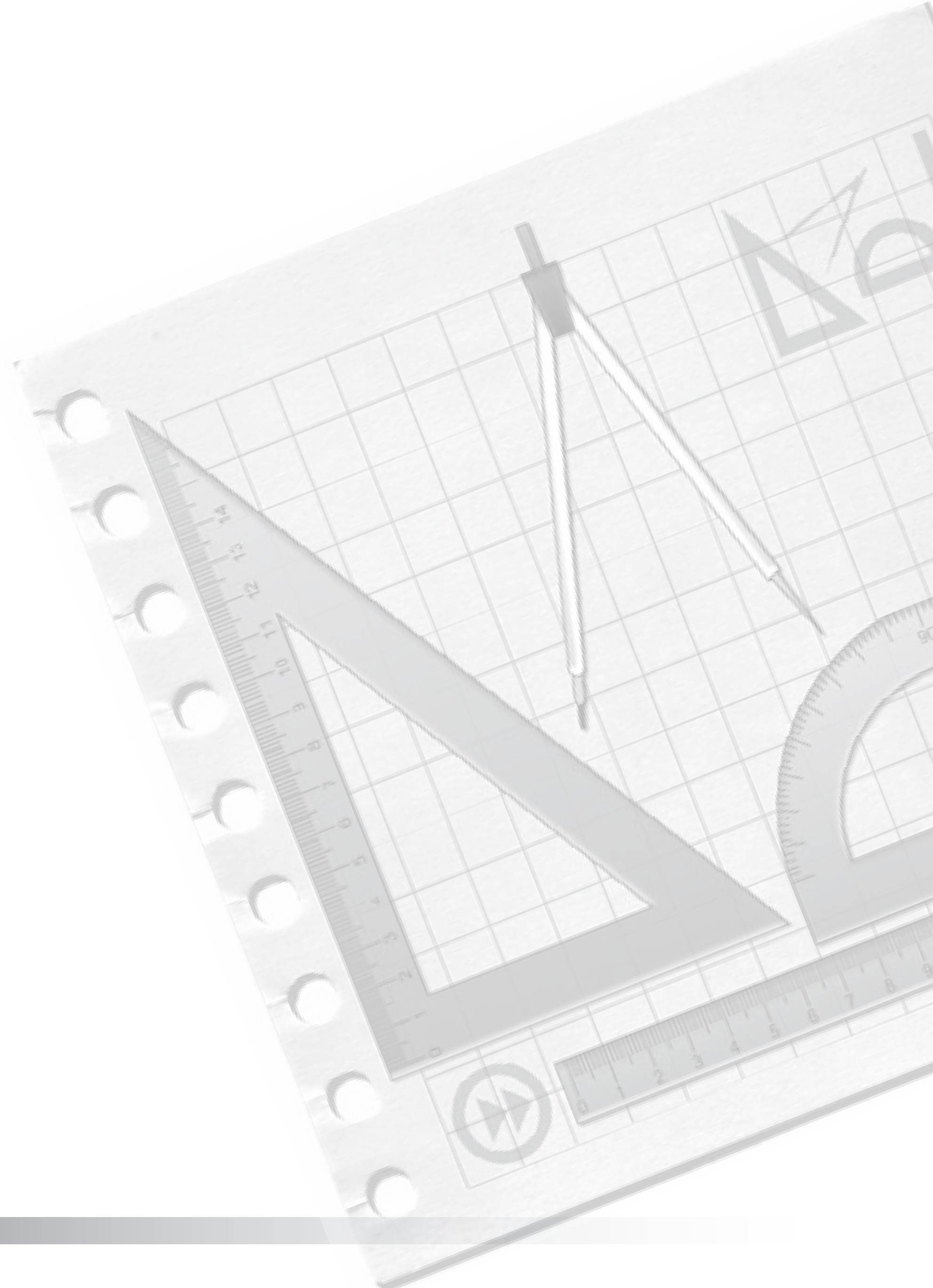
*Este libro se ha elaborado con el propósito de apoyar la práctica educativa de los cientos de educadores de Fe y Alegría. Su publicación se realizó en el marco del **Programa Internacional de Formación de Educadores Populares** desarrollado por la Federación Internacional Fe y Alegría desde el año 2001.*

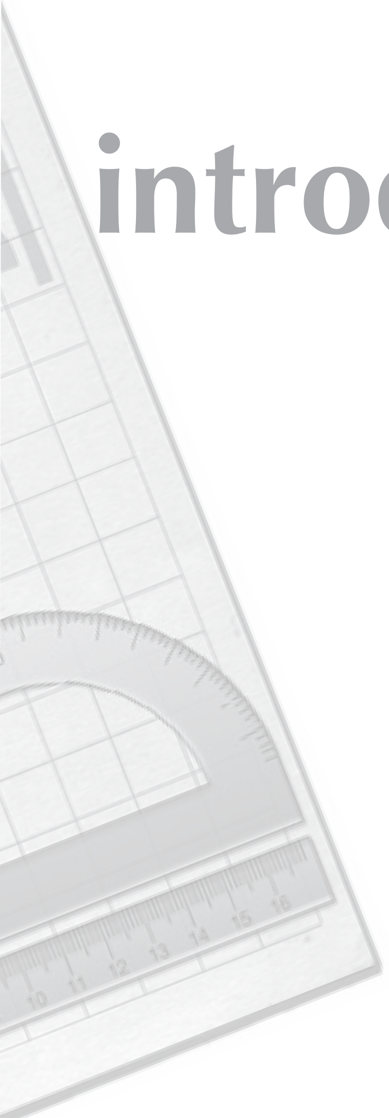
*Diseño y Diagramación: **Moira Olivar***
*Ilustraciones: **Corina Álvarez***
*Concepto gráfico: **Juan Bravo***
*Corrección de textos: **Carlos Guédez y Martín Andonegui***

Edita y distribuye: Federación Internacional de Fe y Alegría. Esquina de Luneta. Edif. Centro Valores, piso 7 Altagracia, Caracas 1010-A, Venezuela. Teléfonos: (58) (212)5631776 / 5632048 / 5647423.
Fax: (58) (212) 5645096
www.feyalegria.org

Depósito legal: lf 603 2007 510 2351
Caracas, junio 2007

Publicación realizada con el apoyo de: Centro Magis - Instituto Internacional para la Educación Superior en América Latina y el Caribe (IESALC) - Corporación Andina de Fomento (CAF)





introducción

A modo de introducción..., nuestro recordatorio

La sugerencia que proponíamos en el Cuaderno Nº 1 y que siempre presidirá los demás Cuadernos: Vamos a estudiar matemática, pero no lo vamos a hacer como si fuéramos simplemente unos alumnos que posteriormente van a ser evaluados, y ya. No. Nosotros somos docentes –docentes de matemática en su momento- y este rasgo debe caracterizar la forma de construir nuestro pensamiento matemático. ¿Qué significa esto?

• La presencia constante de la meta última de nuestro estudio: alcanzar unos niveles de conocimiento tecnológico y reflexivo, lo cual debe abrir ese estudio hacia la búsqueda de aplicaciones de lo aprendido, hacia el análisis de los sistemas que dan forma a nuestra vida y utilizan ese conocimiento matemático, y hacia criterios sociales y éticos para juzgarlos.

• Construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo enseñamos en el aula, además de reflexionar acerca de cómo nuestro conocer limita y condiciona nuestro trabajo docente. De esta forma, integrar nuestra práctica docente en nuestro estudio.

• Como complemento a lo anterior, construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo podemos llevar al aula. Para ello, tomar conciencia del proceso que seguimos para su construcción, paso a paso, así como de los elementos –cognitivos, actitudinales, emocionales…- que se presenten en dicho proceso. Porque a partir de esta experiencia reflexiva como estudiantes, podremos entender y evaluar mejor el desempeño de nuestros alumnos –a su nivel- ante los mismos temas.

• En definitiva, entender que la matemática es la base de su didáctica: la forma en que se construye el conocimiento matemático es una fuente imprescindible a la hora de planificar y desarrollar su enseñanza.

Y ahora, vamos al tema de este Cuaderno, los cuerpos geométricos.

1. ¿Qué es un cuerpo geométrico?

1.1. La idea del cuerpo geométrico

En el Cuaderno 12 escribíamos: “En nuestro derredor encontramos objetos naturales o elaborados por personas; por ejemplo, una roca, una pelota de fútbol, una casa. Si pudiéramos meterlos ajustadamente en sendas cajas, de manera que cada objeto citado tocara por dentro todas las caras de la caja en que está metida, sin deformarlas, nos daríamos cuenta de que podríamos obtener, de tales objetos, tres medidas de longitud diferentes: su largura, su anchura (profundidad) y su altura. Es decir, los objetos que ocupan un lugar en el espacio físico tienen tres dimensiones. También tiene ***tres dimensiones*** el espacio geométrico, representado por el ***espacio*** físico”.

Todos los seres y objetos de la naturaleza; y todos los artefactos elaborados en las distintas culturas, son tridimensionales. Todo lo que percibimos son objetos de tres dimensiones.

Ahora bien, cuando nos referimos a los ***cuerpos geométricos*** estamos haciendo alusión a aquellos objetos tridimensionales que tienen ciertas particularidades, ciertas formas más sencillas, más elementales, más regulares; por ejemplo, los que presentan caras externas constituidas por polígonos o círculos, o los que tienen una forma parcial o totalmente redonda... En este grupo quedan los objetos que tienen la apariencia de cajas, pirámides, cilindros, conos, esferas, etc.

Así como en el plano estudiamos los polígonos, la circunferencia y el círculo, como las figuras elementales dotadas de ciertas regularidades, también en el espacio nos restringiremos al estudio de cuerpos tridimensionales dotados de regularidades como las ya mencionadas. Sin embargo, no se desdeña el estudio de los demás objetos tridimensionales; más bien se sugiere ver en cualquiera de ellos la posible semejanza con –o la posible integración de- los cuerpos geométricos que se estudiarán con más detalle.

Los cuerpos geométricos también suelen ser denominados como ***sólidos***. Esta denominación es válida, aunque no debe sugerir la idea de que tales cuerpos tienen que estar “llenos” interiormente, o tienen que ser “duros”; una caja de zapatos vacía y cerrada es también un ejemplo de cuerpo geométrico, de sólido...

1.2. La clasificación de los cuerpos geométricos

El criterio básico para clasificar los cuerpos geométricos se refiere, precisamente, a la ***naturaleza de sus caras exteriores***. Y, así, tenemos:

•Los ***poliedros*** (poliedro = polus [mucho] + hedra [cara] = muchas caras), cuerpos geométricos limitados exclusivamente por polígonos.

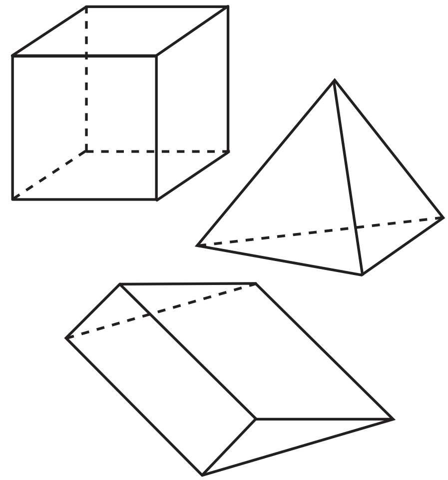
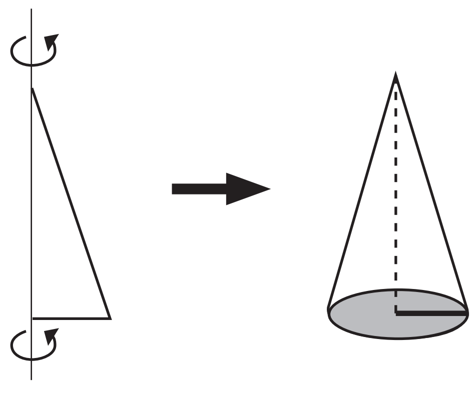


Fig. 1: Algunos poliedros

• Los ***cuerpos redondos*** o ***sólidos de revolución***, cuerpos geométricos engendrados por la revolución completa de una figura plana alrededor de alguna de sus líneas.



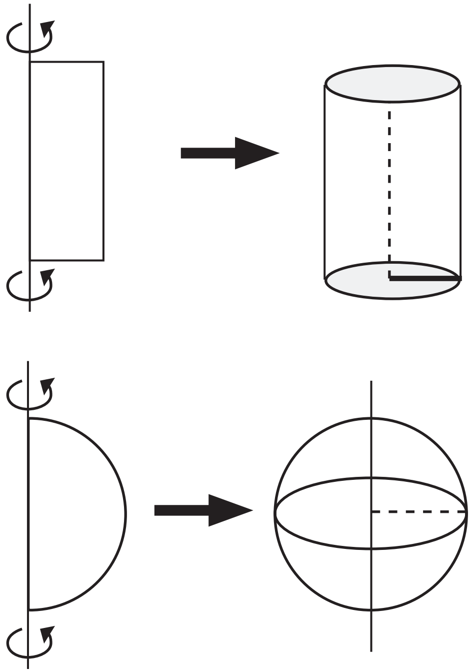


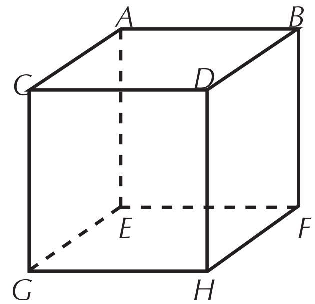
Fig. 2: Algunos sólidos de revolución (figuras tomadas de Benito y Sánchez, s. f.)

2. Poliedros

2.1. Concepto y elementos de un poliedro

Como se ha dicho, los poliedros son cuerpos geométricos cuyas caras externas son todas polígonos.

Tomando como referencia la figura de un cubo, vamos a precisar los elementos de un poliedro.



a) ***Caras:*** Son los polígonos que limitan al poliedro; por ejemplo en la figura, GHDC, HFBD, GHFE... Hay 6 caras en la figura.

b) ***Aristas***: Son los lados de los polígonos que conforman las caras del poliedro; por ejemplo en la figura: AE, HF, CD... Hay 12 aristas en la figura.

c) ***Vértices***: Son los vértices de los polígonos que conforman las caras del poliedro; por ejemplo en la figura: A, E, B... Hay 8 vértices en la figura.

d) ***Ángulos diedros***: Son los formados por dos caras contiguas, es decir, que comparten una arista común; por ejemplo en la figura, el ángulo formado por las caras EFBA y GEAC. Hay 12 ángulos diedros en la figura, tantos como aristas.

e) ***Ángulos triedros***: Son los formados por tres caras que concurren en un vértice; por ejemplo en la figura, el ángulo formado por las caras GHDC, GEAC y CDBA, que concurren en el vértice C. Hay 8 ángulos triedros en la figura, tantos como vértices [En figuras más complejas puede hablarse de ángulos poliedros, formados por más de tres caras que concurren en un solo vértice; conviene no confundir los objetos matemáticos "poliedro" y "ángulo poliedro"...].

f) ***Diagonales***: Son los segmentos que unen dos vértices que no pertenecen a la misma cara; por ejemplo en la figura: GB, AH... Hay 4 diagonales en la figura, la mitad del número de vértices de la misma [No deben confundirse las diagonales del poliedro con las de las caras del mismo...].

g) ***Planos diagonales:*** Son los planos que pasan por cuatro vértices de la figura, de los cuales sólo dos pertenecen a la misma cara; por ejemplo en la figura, el plano formado por los puntos G, F, B y C, o bien por los puntos C, D, E y F Hay 6 planos diagonales en la figura, la mitad del número de aristas de la misma.

2.2. Clasificación de los poliedros

Puede hacerse atendiendo a diversos criterios:

a) Según el número de caras: En general, se habla de un poliedro de "tantas" caras. Pero, como en el caso de los polígonos, algunos de ellos tienen un nombre particular:

Nº de caras	Nombre	Significado literal (griego)
4	Tetraedro	Cuatro caras
5	Pentaedro	Cinco caras
6	Hexaedro (cubo)	Seis caras

Nº de caras	Nombre	Significado literal (griego)
7	Heptaedro	Siete caras
8	Octaedro	Ocho caras
10	Decaedro	Diez caras
12	Dodecaedro	Doce caras
15	Pentadecaedro	Quince caras
20	Icosaedro	Veinte caras

b) ***Según la medida de los ángulos diedros***: Para calcular la medida de un ángulo diedro se toma un punto cualquiera de la arista común a las dos caras; en cada cara, se traza una perpendicular a la arista en ese punto común. Así queda construido un ángulo en el nuevo plano formado por las dos perpendiculares: la medida de este ángulo es la medida del ángulo diedro. Por ejemplo, en el cubo, todos los ángulos diedros miden 90º.

Si la medida de cada uno de los ángulos diedros del poliedro es menor de 180º, el poliedro se denomina ***convexo***; en caso contrario, ***cóncavo***. Dicho de otra manera, si al tomar dos puntos cualesquiera del interior del poliedro, el segmento que los une queda todo él en su interior, hablamos de un poliedro convexo, es decir, sin "entrantes". Un poliedro se califica como cóncavo cuando presenta algún entrante, es decir, algún ángulo diedro de medida mayor que 180º. En la fig.3, el dibujo b) representa un poliedro cóncavo.

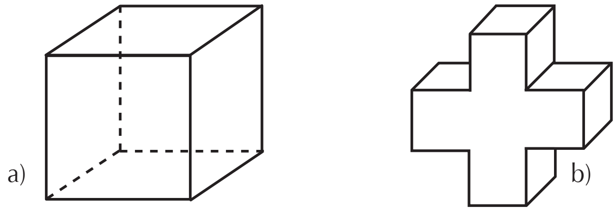


Fig. 3: Poliedros: a) convexo; b) cóncavo

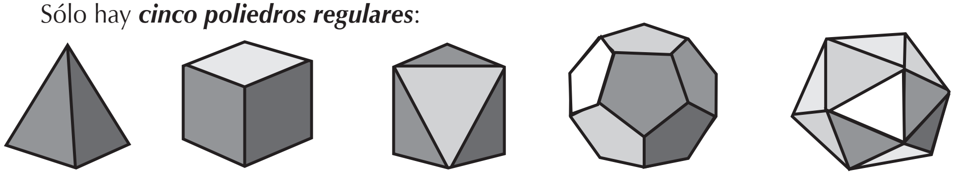
1. ¿Cuántas caras, aristas, vértices, y ángulos diedros tiene el poliedro b) de la figura anterior?

2. ¿Cuántas de esas caras son polígonos cóncavos?

3. ¿Cuántos de esos ángulos diedros son cóncavos? ¿Cuánto mide cada uno de ellos?

c) Según la congruencia de sus caras y ángulos diedros. Si todas las caras de un poliedro son polígonos regulares congruentes entre sí, y también son congruentes todos sus ángulos diedros, el poliedro se denomina ***regular***. E ***irregular*** en caso contrario.

Sólo hay ***cinco poliedros regulares***:



Tetraedro Cubo Octaedro Dodecaedro Icosaedro

Figura 4: Poliedros regulares

Sus características y elementos se muestran en la siguiente tabla:

Nombre	Caras	Nº Aristas	Nº Vértices
Tetraedro regular	4 triángulos equiláteros	6	4
Hexaedro regular (cubo)	6 cuadrados	12	8
Octaedro regular	8 triángulos equiláteros	12	6
Dodecaedro regular	12 pentágonos	30	20
Icosaedro regular	20 triángulos equiláteros	30	12

Observe que en el tetraedro, cubo y dodecaedro se presentan ángulos triedros (en cada vértice concurren tres caras), mientras que en el octaedro hay ángulos tetraedros (en cada vértice concurren cuatro caras) y en el icosaedro, ángulos pentaedros (en cada vértice concurren cinco caras).

Los poliedros regulares son conocidos como ***sólidos pitagóricos o platónicos.*** El primer calificativo se debe a que ya los pitagóricos conocían su existencia y que no había más poliedros regulares. Además asociaron el tetraedro, el cubo, el octaedro y el icosaedro a los elementos básicos de nuestro planeta: fuego, tierra, aire y agua, respectivamente. El segundo calificativo se debe a que Platón terminó de asociar el dodecaedro al universo, bajo el supuesto de que este poliedro era diferente a los demás y, por lo tanto, debía referirse a la materia del universo, concebida también como diferente a la de la Tierra.

[Si desea una visualización dinámica de cada uno de los poliedros regulares, puede acudir a la red en la dirección http://www.walter-fendt.de/m11s/platonsolids_s.htm].

4. ¿Por qué al acoplar exactamente por sus bases dos tetraedros regulares del mismo tamaño no se forma un poliedro regular de seis caras?

2.3. Otros poliedros de interés

a) Prismas

Son poliedros que poseen dos caras congruentes (bases) ubicadas en planos paralelos y con sus aristas homólogas paralelas, de tal modo que las demás caras (caras laterales) son paralelogramos.

Cuando las aristas de esas caras laterales son perpendiculares a las bases, se habla de ***prismas rectos***; en caso contrario, se trata de ***prismas oblicuos***. Las caras laterales de los prismas rectos son rectángulos; la de los prismas oblicuos, romboides (o rombos). Se denomina ***altura*** del prisma a la distancia entre las dos bases.

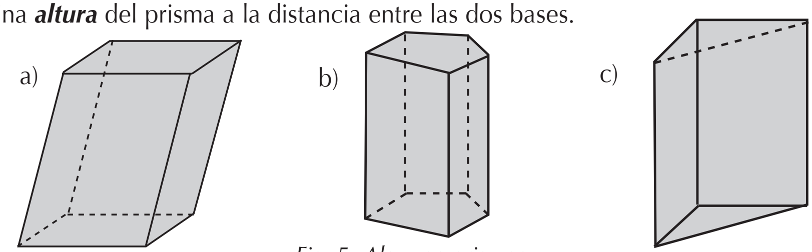


Fig. 5: Algunos prismas

En la figura anterior encontramos:

a) un prisma oblicuo de bases cuadrangulares;

b) un prisma recto de bases pentagonales

c) un prisma recto de bases triangulares.

Un prisma se califica como ***regular*** cuando es recto y sus bases son polígonos regulares; en la figura anterior no aparece ningún prisma regular; un cubo sí lo es.

b) Paralelepípedos (paralelepípedo = paralellos [paralelos] + epipedon [plano])

Los paralelepípedos son prismas cuyas bases son paralelogramos; por consiguiente y como su nombre lo indica, poseen dos pares de caras laterales paralelas y congruentes. Las bases pueden ser rombos, romboides o rectángulos. En este último caso –que incluye también el de las bases cuadradas- el paralelepípedo recibe el nombre de ***ortoedro*** (ortoedro = orto [recto] + hedra [cara]), prisma que posee todas sus caras rectangulares; el ortoedro debe ser, pues, un paralelepípedo recto, no oblicuo. El cubo viene a ser un ortoedro regular, pero no es el único.

c) Pirámides

Son poliedros con una sola base poligonal y caras laterales triangulares, que se unen en un punto denominado ***vértice*** de la pirámide. El número de lados del polígono de la base –o, lo que es lo mismo, el número de caras triangulares laterales- determina el tipo de pirámide: triangular (llamada tetraedro), cuadrangular, pentagonal, etc. Se denomina ***altura*** de la pirámide a la distancia entre el vértice y la base.

Una pirámide se califica como ***regular*** si el polígono de la base lo es y los triángulos laterales son todos isósceles y congruentes. El tetraedro regular es un caso particular, ya que los cuatro triángulos son equiláteros.

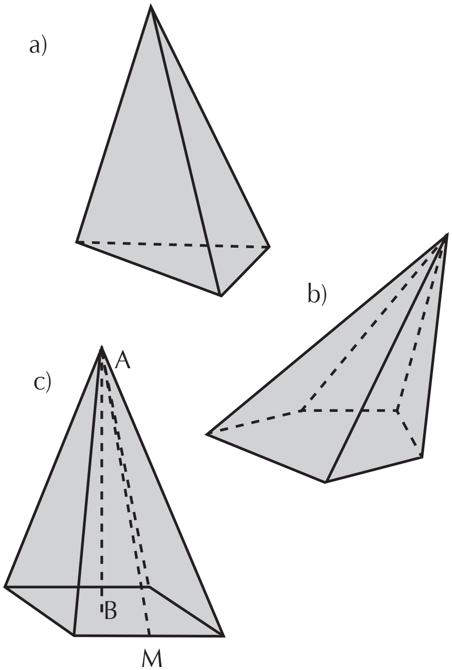


Fig. 6: Algunas pirámides

En la figura anterior encontramos:

a) una pirámide triangular (tetraedro) irregular;
b) una pirámide pentagonal irregular;
c) una pirámide cuadrangular regular.

En este último caso, el pie de la altura AB de la pirámide, es decir, el punto B, es el centro del polígono de la base. También se destaca otro elemento, ***la apotema***, que es la altura de cualquiera de los triángulos isósceles de las caras laterales; en la figura c), AM es una apotema de la pirámide.

d) Los troncos...

Si un prisma se intersecta con un plano no paralelo a las bases, se obtiene un objeto llamado ***tronco de prisma*** (en realidad se obtienen dos troncos de prisma...) o ***prisma truncado.*** Igual ocurre con una pirámide; pero en este caso, si el plano de intersección es paralelo a la base, el cuerpo resultante se denomina ***tronco de pirámide (pirámide truncada) de bases paralelas***; sus caras laterales son trapecios; la altura de este objeto es la distancia entre las dos bases.

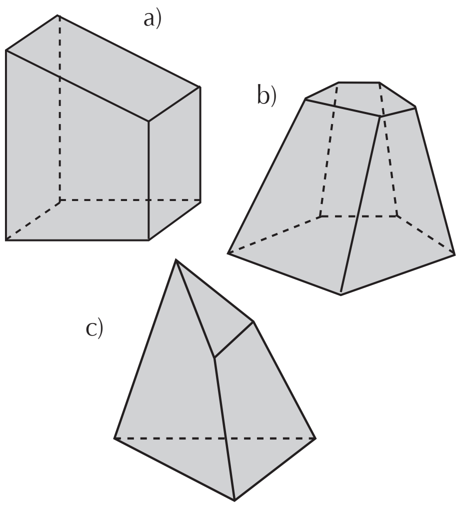


Fig. 7: Troncos de prisma y de pirámides

En la figura anterior encontramos:
a) un tronco de prisma;
b) un tronco de pirámide de bases paralelas;
c) un tronco de pirámide de bases no paralelas.

Reúnase con sus colegas y hagan una relación de objetos naturales o artefactos culturales (envases, edificaciones, muebles, objetos de la vida diaria...) que ustedes conozcan y tengan la forma de prismas, paralelepípedos o pirámides, sean completos o truncados. ¿Conocen algún objeto que tenga la forma de alguno de los poliedros regulares? ¿Y alguno que posea la forma de un poliedro cóncavo?

2.4. Algunos problemas referentes a poliedros

¿Es posible colocar cuatro puntos en el espacio de tal forma que cada uno equidiste de todos los demás?

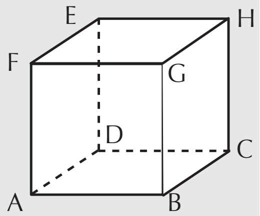
Pues si lo piensa un poco y se fija en lo que hemos expuesto hasta ahora, llegará sin duda a la respuesta: Sí, colocándolos en los vértices de un tetraedro regular. ¿Es posible hacer esto en el plano? No; en el plano sólo es posible colocar ternas de puntos equidistantes entre sí: en los vértices de cualquier triángulo equilátero.

5. ¿Y es posible colocar en el espacio cinco puntos equidistantes entre sí?

6. ¿Cuántos pares de aristas paralelas tiene un cubo?

7. ¿Con cuáles de los siguientes grupos de vértices del cubo de la figura se puede construir un triángulo equilátero?

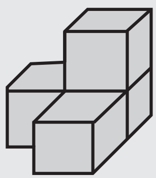
a) A, B, F
b) A, D, G
c) A, C, H
d) A, C, E
e) F, D, H



8. ¿Cuántas pirámides regulares cuya base sea la cara de un cubo dado, y cuya altura sea la mitad de la arista del mismo cubo, caben en dicho cubo? ¿Queda alguna porción de espacio del cubo sin ocupar?

9. Se desea pintar un cubo de tal forma que dos caras adyacentes no tengan el mismo color. ¿Cuál es el menor número de colores que se necesitan para ello?

10. Se acaba de pintar la parte exterior (lateral y superior) de estos cuatro cubos apilados. ¿Cuántas caras se han pintado?



En el centro del piso de una habitación está depositado un cubo. Si por el techo puede moverse libremente un foco de luz, ¿qué formas puede adoptar la sombra del cubo en el piso de la habitación?

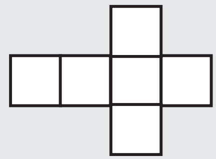
2.5. Construcción de poliedros

Una de las actividades ligadas al estudio de los poliedros es la de su construcción. A este respecto, es muy importante advertir que todos los poliedros huecos pueden “abrirse” y colocarse sobre un plano, en forma de plantilla. Para ello, nada mejor que tomar cualquier caja y sin romperla, despegar sus junturas y extenderla sobre la mesa, para ver su configuración y las “pestañas” que, al aplicarles el pegamento correspondiente, sirven para armar el cuerpo.

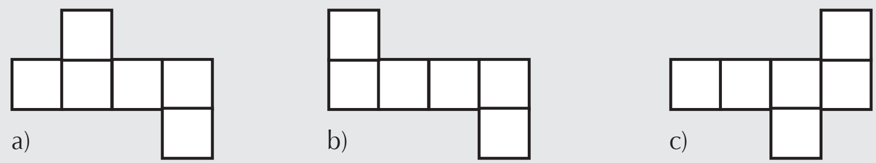
También podemos proceder en sentido contrario: partir de una plantilla y construir el poliedro correspondiente. En este caso, el problema consiste en elaborar esa plantilla. El primer paso debe ser el de dibujar sus caras y el de ubicar adecuadamente las bases. Un segundo paso será el de colocar las pestañas en los lugares pertinentes pensando en que, al recortar de una sola vez la plantilla y colocar el pegamento en los lugares indicados, pueda armarse adecuadamente el poliedro.

Esta es una tarea muy interesante e importante, ya que con ella se ofrece la oportunidad de desarrollar la capacidad de visualizar las cosas antes de hacerlas y, por consiguiente, el sentido espacial.

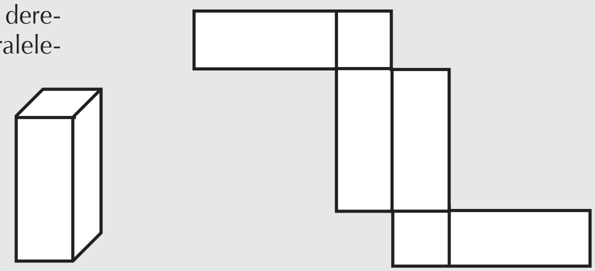
Esta es una plantilla para armar un cubo, aunque todavía no están ubicadas las pestañas. ¿Puede construir usted otras dos plantillas diferentes, con las cuales también se pueda construir un cubo?



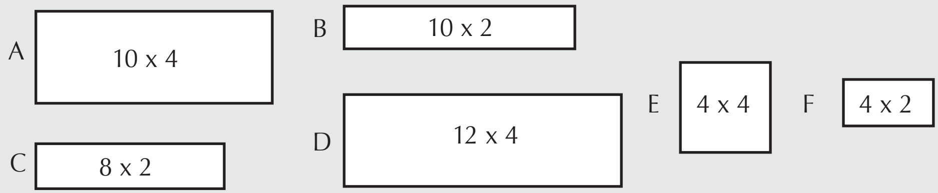
11. Determine si, aun antes de colocar las pestañas, se puede construir un cubo con las siguientes plantillas:



12. Con la plantilla de la derecha, ¿puede construirse el paralelepípedo de la izquierda?



13. Se dispone de un par de cada de una de estas plantillas elementales:

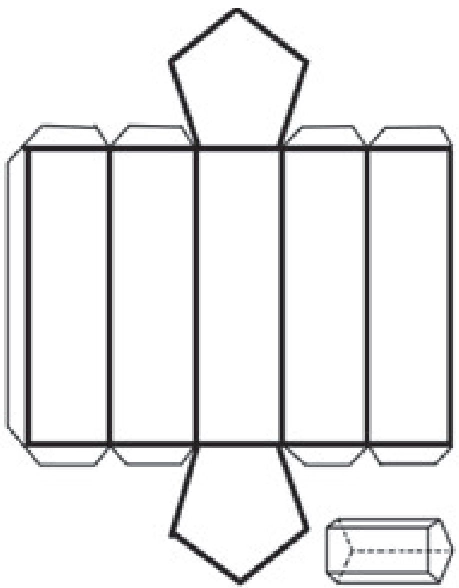


¿Con qué combinación(es) de ellas puede construirse un paralelepípedo?

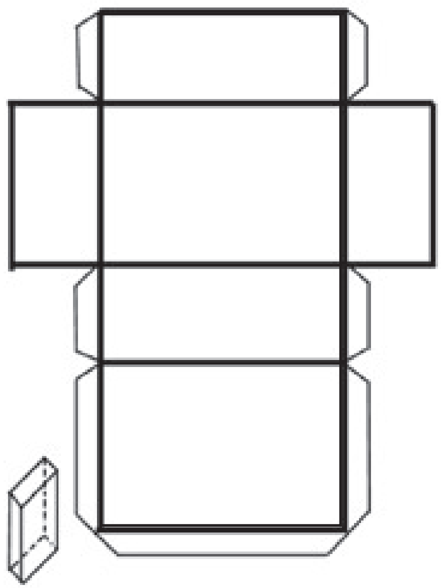
Construya sendas plantillas para armar un tetraedro regular y un octaedro regular.

Pero si usted tiene prisa y desea acceder a plantillas de poliedros (incluidos los poliedros regulares) ya confeccionadas y con sus correspondientes pestañas, como las que se muestran en la figura 8, puede entrar en la red, en la dirección *http://www.kokone.com.mx/tareas/figuras/home.html*

PRISMA PENTAGONAL REGULAR



PARALELEPÍPEDO



PIRÁMIDE HEXAGONAL REGULAR

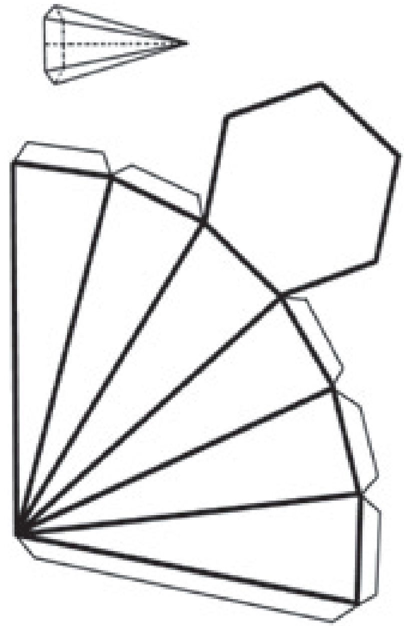
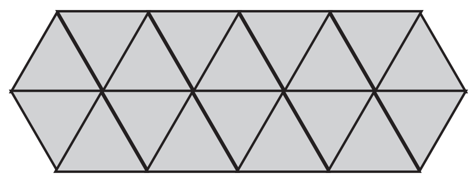


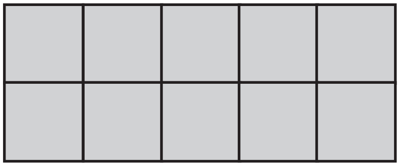
Fig. 8: Plantillas de algunos poliedros (Blanco, 2005)

Con respecto a las plantillas de los poliedros regulares, recordemos que los mosaicos (embaldosados) planos que pueden hacerse con polígonos regulares, sólo admiten triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares, como veíamos en el Cuaderno 14:

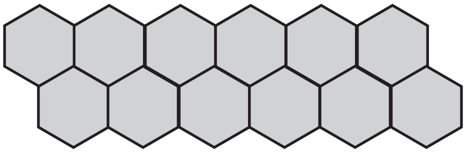
Con triángulos equiláteros



Con cuadrados



Con hexágonos regulares



Pero así como el mosaico de triángulos equiláteros puede utilizarse (debidamente acomodado) para elaborar la plantilla de un tetraedro, de un octaedro y de un icosaedro, y el mosaico de cuadrados puede utilizarse (también debidamente acomodado) para elaborar la plantilla de un cubo, no ocurre lo mismo con el mosaico de hexágonos regulares: con él no puede elaborarse la plantilla de ningún poliedro regular. Y sin embargo, los pentágonos regulares, con los cuales no puede elaborarse un mosaico plano, sí pueden combinarse para crear la plantilla de un dodecaedro...

14. He aquí otro interesante ejercicio de observación. Fíjese en la siguiente tabla que debe mostrar, para cada poliedro considerado, el número de caras, de vértices y de aristas (complete los valores de las casillas vacías):

Poliedro	Nº Caras	Nº Vértices	Nº Aristas
Prisma triangular	5	6	9
Paralelepípedo	6		12
Pirámide cuadrangular	5	5	
Dodecaedro		20	30
Prisma pentagonal	7		
Octaedro		6	
Pirámide hexagonal			12

Una vez que haya llenado todas las casillas de la tabla, observe bien los valores de cada fila, es decir, de cada poliedro, y descubra qué relación existe entre los números de caras, de vértices y de aristas en cualquier poliedro (esta relación fue descubierta por Euler, un matemático alemán del siglo XVIII y lleva su nombre).

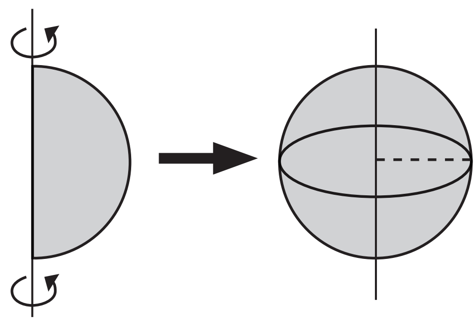
3. Sólidos de revolución

3.1. Concepto y clasificación de los sólidos de revolución

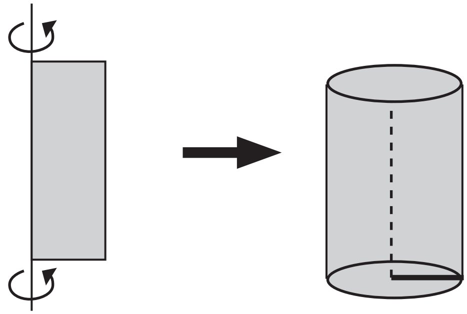
Como ya se dijo, los sólidos de revolución son cuerpos geométricos engendrados por la revolución completa de una figura plana alrededor de alguna de sus líneas.

Los sólidos de revolución se clasifican, precisamente, tomando en cuenta la figura plana que rota una vuelta completa y el eje alrededor del cual se produce la rotación. Así, los más conocidos son:

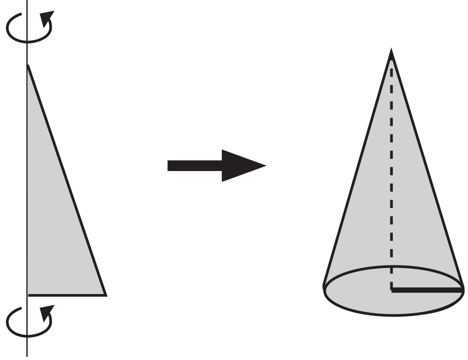
a) La esfera: Generada por la rotación de un semicírculo alrededor de su diámetro:



***b) El cilindro**:* Generado por la rotación de un rectángulo alrededor de un lado:

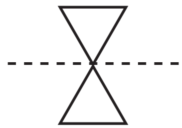
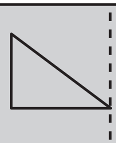
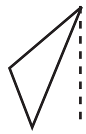
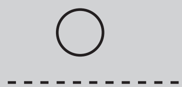


c) El cono: (konos [piña, fruto del pino]) Generado por la rotación de un triángulo rectángulo alrededor de un cateto:



d) Otros sólidos de revolución: No resulta difícil construir otros sólidos de revolución; basta con tomar cualquier figura plana y cualquier eje de rotación (una línea de esa figura, o cualquier otro segmento) y hacer un giro (completo o no).

Como ejercicio de aplicación, imagínese el sólido de revolución que resulta en cada caso al efectuar el giro de las siguientes figuras, de acuerdo al eje de rotación indicado y a la amplitud del giro sugerido:

Figura plana que gira	Eje de giro	Amplitud de giro
	Línea punteada	180º
	Línea punteada	90º
	Línea punteada	180º
	Línea punteada	360º
	Línea punteada	360º

3.2. Elementos de los sólidos de revolución

a) Elementos de un cilindro

El lado del rectángulo, paralelo al que se toma como eje del giro que genera el cilindro, se denomina ***generatriz*** del cilindro. Una vez construido, en un cilindro se distinguen las dos ***bases***, dos círculos congruentes que tienen el mismo radio. La distancia entre las bases es la ***altura*** del cilindro, cuya longitud coincide con la de su generatriz. La superficie lateral del cilindro se denomina ***superficie cilíndrica de revolución***; extendida sobre un plano, tiene la forma de un rectángulo.

b) Elementos de un cono

La ***generatriz*** del cono es la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyo giro alrededor de uno de sus catetos genera el cono. La ***altura*** del cono es la distancia del vértice a la base y su longitud coincide con la del cateto que sirve de eje de giro para generar el cono. La ***base*** está formada por un solo círculo, con su radio y diámetro correspondientes. La superficie lateral del cono se denomina ***superficie cónica de revolución***; extendida sobre un plano, tiene la forma de un sector circular.

Los cilindros y conos que se obtienen por rotación se denominan rectos; los cilindros y conos oblicuos no se generan por rotación sino por deformación de los correspondientes cuerpos rectos. También existen cilindros y conos truncados; en un cilindro truncado, las bases no son paralelas; sí pueden serlo en un cono truncado, que recibe entonces el nombre de cono truncado de bases paralelas.

c) Elementos de una esfera

El ***centro*** de la esfera es el punto que equidista de cualquier punto de la ***superficie esférica*** (superficie externa de la esfera). Un ***radio*** de la esfera es un segmento que une el centro con cualquier punto de la superficie esférica; un ***diámetro*** es un segmento que une dos puntos de la superficie esférica y pasa por el centro de la esfera.

También sobre la superficie esférica pueden considerarse ***circunferencias máximas***, caracterizadas porque su radio es el radio de la esfera; análogamente, pueden dibujarse circunferencias de radio menor al de la esfera.

Por ejemplo, en la Tierra considerada como una esfera, los ***meridianos*** y la ***línea del ecuador*** son ejemplos de circunferencias máximas; los paralelos (por ejemplo, los de los trópicos, o los de los círculos polares) son circunferencias menores.

Sobre la superficie esférica pueden considerarse porciones de la misma que reciben nombres particulares (Ver Figura 9):

• ***Zona esférica:*** porción de superficie esférica delimitada por dos planos paralelos que cortan a la esfera. Por ejemplo, en la superficie terrestre, la llamada zona tórrida, o las zonas templadas.

• ***Casquete esférico:*** cada una de las porciones de la superficie esférica que quedan delimitadas cuando un plano corta a la esfera. Por ejemplo, en la superficie terrestre se habla de los casquetes polares.

• ***Huso esférico:*** porción de la superficie esférica comprendida entre dos semicircunferencias máximas que comparten su diámetro. Por ejemplo, la superficie terrestre está imaginariamente dividida en 24 husos iguales llamados horarios, delimitados por meridianos; cada huso horario agrupa a los países o regiones del mundo que comparten la misma hora legal.

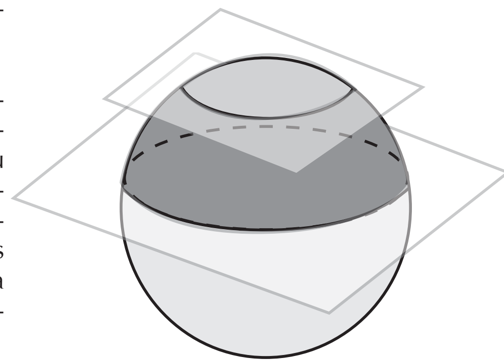
Finalmente, pueden considerarse las siguientes porciones sólidas de la esfera (Ver Figura 9):

• ***Segmento esférico de dos bases:*** porción de esfera delimitada por dos planos paralelos que cortan a la esfera; la parte superficial es una zona esférica.

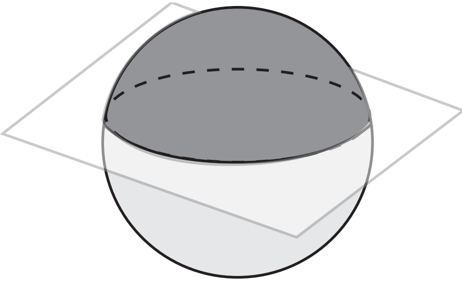
• ***Segmento esférico de una base***: porción de esfera delimitada por un plano que corta a la esfera; la parte superficial es un casquete esférico. Una semiesfera es un ejemplo de segmento esférico de una base.

• ***Cuña esférica***: porción de esfera comprendida entre dos semicírculos máximos que comparten su diámetro; la parte superficial es un huso esférico.

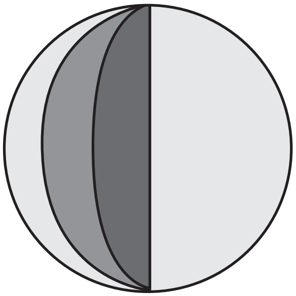
• ***Sector esférico***: porción de esfera comprendida entre un casquete esférico y una superficie cónica cuyo vértice coincide con el centro de la esfera (como si fuera un helado de barquilla cónica, con algo de helado sobresaliendo...).



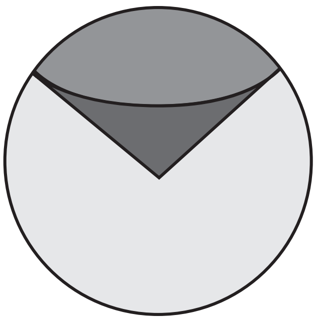
a) Zona esférica (superficie) y Segmento esférico de dos bases (volumen)



b) Casquete esférico (superficie) y Segmento esférico de una base (volumen)



c) Huso esférico (superficie) y Cuña esférica (volumen)



d) Sector esférico (volumen)

Fig. 9: Porciones superficiales y sólidas de una esfera

Al igual que en el caso de los poliedros, reúnase con sus colegas y hagan una relación de objetos naturales o artefactos culturales (envases, edificaciones, esculturas, muebles, objetos de la vida diaria...) que ustedes conozcan y tengan la forma de esferas o de alguna de sus porciones, o la forma de cilindros y conos, sean completos o truncados. ¿Conocen algún objeto que tenga la forma de otro sólido de revolución?

Averigüe cuántos husos horarios se consideran en el continente americano, y qué países comprende cada uno de ellos.

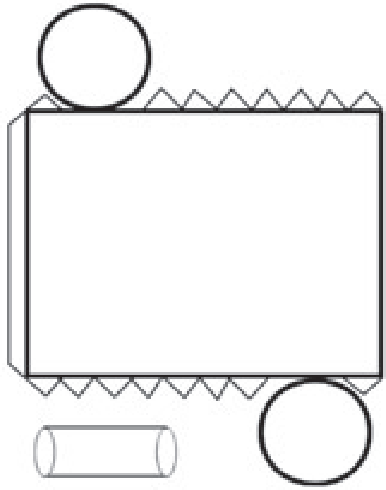
3.3. Construcción de sólidos de revolución

De una forma análoga al caso de los poliedros, es posible elaborar plantillas para construir con ellas algunos sólidos de revolución. Tal es el caso de los cilindros y de los conos. Para ello recordamos la forma que poseen las bases, y el desarrollo sobre un plano de la superficie lateral de ambos tipos de cuerpos.

Las bases del cilindro y del cono son círculos. La superficie lateral del cilindro, extendida sobre un plano, tiene la forma de un rectángulo, cuya base tiene como medida la longitud de la circunferencia de la base, y cuya altura es la altura del cilindro. Por su parte, la superficie lateral del cono extendida sobre un plano, tiene la forma de un sector circular, cuyo radio es la generatriz del cono, y cuyo arco tiene como medida la longitud de la circunferencia de la base.

No es difícil elaborar las plantillas correspondientes. De todos modos, en la figura 11 se muestran ambas plantillas (incluidas las pestañas correspondientes):

CILINDRO



CONO

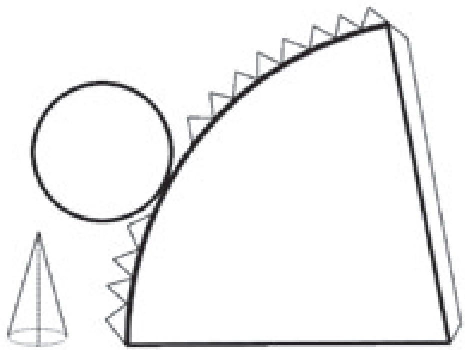


Fig. 10: Plantillas de algunos sólidos de revolución (Blanco, 2005)

Como es evidente, no puede elaborarse plantilla plana alguna para poder construir una esfera o alguna parte de ella.

Trate de averiguar la forma en que los escultores o los alfareros construyen objetos que tienen forma esférica. Y cómo se fabrican las pelotas de fútbol. ¿Cómo saben, los que hacen estos objetos, que su producto es perfectamente "redondo" por donde se le mire?

Probablemente todos hemos visto esos fuegos artificiales que, cuando explotan en el aire, forman una especie de bola con puntos brillantes y de colores, ubicados como si estuvieran a igual distancia del punto en que estalla el cohete. Trate de averiguar, si le es posible, cómo hacen los fabricantes para conseguir esa distribución esférica.

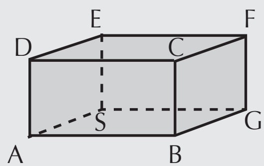
4. Medidas de los cuerpos geométricos

Hasta el momento hemos presentado una clasificación y una descripción de los cuerpos geométricos y de sus elementos, así como hemos abordado su construcción a partir de plantillas planas. Es hora de entrar a medir los diversos elementos que configuran los cuerpos geométricos.

4.1. Medidas de longitudes

Se incluyen aquí casos como los de las aristas, alturas y diagonales de un poliedro; de las apotemas de una pirámide; de los radios, diámetros, generatrices y alturas de cilindros y conos; de los radios, diámetros y circunferencias sobre una esfera. Algunas de estas medidas pueden hacerse directamente. Pero otras veces, en razón de la exactitud de las medidas y en función de los datos aportados, hay que acudir a figuras auxiliares (como triángulos rectángulos) que nos permitan aplicar relaciones conocidas (teorema de Pitágoras).

Dado el paralelepípedo de la figura, de dimensiones: AB = 6 cm, BG = 4 cm, FG = 3 cm, obtener la longitud de la diagonal DG.



Para calcular la longitud del segmento DG, debemos ubicarlo en un triángulo rectángulo. Este puede ser el Δ ADG, cuya hipotenusa es DG. En este triángulo conocemos uno de los catetos, AD = FG = 3 cm, pero desconocemos la medida del cateto AG.

Ahora bien AG figura como hipotenusa en el Δ ABG, que es rectángulo y cuyos catetos AB y BG miden 6 y 4 cm, respectivamente. Aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos: $AG^2 = 6^2 + 4^2 = 36 + 16 = 52$; de donde, $AG = \sqrt{52}$.

Volviendo al Δ ADG, $DG^2 = AG^2 + AD^2 = 52 + 9 = 61$. De donde, $DG = \sqrt{61}$ cm.

¿Cuánto mide la diagonal de un cubo, cuya arista tiene 10 cm de longitud?

La resolución de este problema puede apoyarse en la del problema anterior: sería como encontrar el valor de DG a partir de los datos: AB = BG = FG = 10 cm. De aquí, $AG^2 = 10^2 + 10^2 = 100 + 100 = 200$; de donde, $AG = \sqrt{200}$. Análogamente, $DG^2 = AG^2 + AD^2 = 200 + 100 = 300 = 3 \times 100 = 3 \times 10^2$. De donde, $DG = \sqrt{3x10^2} = \sqrt{10^2} = \sqrt{3}x10 = 10\sqrt{3}cm$ = 10 cm. Y en general, ***la longitud de la diagonal de un cubo cuya arista mide a unidades, es a $\sqrt{3}$ u***.

15. En una caja con forma de paralelepípedo, de dimensiones 3 x 4 x 12 unidades, ¿cabe, sin doblarse, una vara de 13,5 cm?

16. ¿Cuánto mide la altura de un cono si el diámetro de la base mide 10 cm y su generatriz mide 13 cm?

¿Cómo haría usted para obtener la medida del radio de una pelota de fútbol?

4.2. Medidas de ángulos

Con anterioridad se explicó la forma de medir los ***ángulos diedros*** de un poliedro:

Se toma un punto cualquiera de la arista común a las dos caras; en cada cara, se traza una perpendicular a la arista en ese punto común. Así queda construido un ángulo en el nuevo plano formado por las dos perpendiculares: la medida de este ángulo es la medida del ángulo diedro. Por ejemplo, en el cubo, todos los ángulos diedros miden 90º.

Hay ***otros ángulos de interés*** en los poliedros; por ejemplo, el que forman la altura y la generatriz de un cono recto; o la apotema de una pirámide regular con una de sus aristas o con su altura. Para la obtención de su medida hay que proceder en cada caso a partir de los datos que se suministren al respecto, y recurrir a alguna regularidad presente en el triángulo.

¿Cuánto mide el ángulo que forman la generatriz y la altura de un cono, si la primera mide 18 cm y el radio de la base mide 9 cm?

Al construir el triángulo rectángulo que forman el radio de la base y la altura como catetos, y la generatriz como hipotenusa, se observa que el radio mide la mitad que la hipotenusa; por consiguiente, el triángulo rectángulo considerado es la "mitad" de un triángulo equilátero; el ángulo buscado mide 30º.

4.3. Medidas de superficies

Son diversas las superficies de los cuerpos geométricos, susceptibles de ser medidas (recuérdese que por área entendemos la medida de una superficie). Así, en los prismas, paralelepípedos, pirámides, cilindros y conos, hablamos del ***área de las bases*** y del ***área lateral*** (o superficie de revolución, en el caso de cilindros y conos); y del ***área total*** cuando se trata de la suma de las dos anteriores. En el caso de la esfera, nos referimos al ***área de la superficie esférica*** (o de alguna de sus porciones); de manera análoga, en los poliedros regulares se habla del área de su superficie externa.

No vamos a llenarnos de fórmulas; simplemente, en cada caso hay que evaluar la figura en cuestión, precisar los polígonos o círculos que forman las bases, y los polígonos de las caras laterales, tomar en cuenta los datos que se aportan, y hallar el área de la superficie solicitada. Tan sólo destacamos como novedad que el área de una superficie esférica de radio *r* equivale al área de cuatro círculos del mismo radio (4 círculos máximos); es decir:

$$\boxed{\boldsymbol{A = 4 \times \pi \times r^2.}}$$

¿Cuál es el área total de un cubo si su diagonal interna mide 8 cm?

El área total de un cubo es la suma de las áreas de sus seis caras, que son cuadrados. Si la arista mide *a* cm, al área total será: $A = 6 \times a^2$. No conocemos el valor de *a*, sino la medida de la diagonal del cubo, 8 cm. Pero como acabamos de ver, existe una relación entre la diagonal *d* y la arista *a* de un cubo: $d = a\sqrt{3}$; de aquí, $d^2 = (a\sqrt{3})^2 = 3 \times a^2$. Como necesitamos $6 \times a^2$, basta multiplicar la igualdad anterior por dos: $2 \times d^2 = 6 \times a^2$; y llegamos a: $A = 6 \times a^2 = 2 \times d^2$; luego $A = 2 \times 8^2 = 2 \times 64 = 128$ cm^2.

Un tubo para guardar planos tiene forma de cilindro; su altura mide 70 cm y el diámetro de su tapa, 10 cm. Si se desea forrarlo interiormente con una tela (sin incluir las tapas), ¿cuánta tela hará falta?

Nos están pidiendo calcular el área lateral del cilindro. Como sabemos, la superficie lateral, extendida, tiene forma de rectángulo, cuya base *b* mide exactamente igual que la circunferencia de su base; y la altura a coincide con la del cilindro.

Así que, $b = 2 \times \pi \times r = 2 \times \pi \times 5$ cm $= 10 \times \pi$ cm; $a = 70$ cm. Y el área solicitada es la de un retal cuadrangular, cuya área es: $(10 \times \pi \text{ cm}) \times 70$ cm; es decir, $A = 700 \times \pi$ cm^2.

¿Cuál es el área lateral de un cono cuya altura mide 12 cm y el diámetro de su base, 10 cm?

El área lateral del cono equivale al área del sector circular que se obtiene al desplegarlo. Esta área (Cuaderno 15) viene dada por: $A = ½ \times r \times l$, donde *r* es la longitud del radio de la circunferencia a la que pertenece el sector (en nuestro caso, la longitud de la generatriz del cono), y *l* es la longitud del arco del sector (en nuestro caso, la longitud de la circunferencia de la base del cono).

Para obtener la longitud de la generatriz, acudimos al triángulo rectángulo formado por la altura y el radio de la base (catetos) y la generatriz *g* (hipotenusa). En él, aplicando el teorema de Pitágoras, obtenemos: $g^2 = 12^2 + 5^2 = 169$; de donde, $g = 13$ cm. Por otro lado, la longitud *l* de la circunferencia de la base es: $l = 2 \times \pi \times 5$ cm $= 10 \times \pi$ cm.

Finalmente, el ***área lateral del cono*** es: $A_l = ½ \times g \times l = ½ \times 13 \times 10 \times \pi = 65 \times \pi$ cm^2.

¿Qué ocurriría si el área lateral de un cono fuera igual a su área total?

A veces conviene precisar el significado de los términos; por ejemplo, cuando decimos que la medida o el valor de algo es "ilimitado", fácilmente pensamos que es enorme, casi infinito, algo que no se puede medir porque no hay valor que alcance para ello. Y sin embargo, ilimitado sólo significa que "no tiene límites", que no se puede colocar una línea que demarque exactamente los límites del objeto que se mide.

¿Puede haber algo que sea ilimitado pero que, a su vez, tenga un valor preciso, incluso pequeño? Sí; por ejemplo, ***la superficie de una esfera***. Esta superficie ***no tiene límites***: ¿dónde empieza y dónde termina? Y, ***sin embargo, tiene un valor finito***: $4 \times \pi \times r^2$.

17. Calcule el área total de los siguientes cuerpos geométricos:

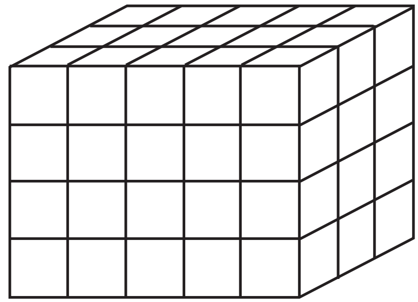
Cuerpo geométrico	Medidas
a) Pirámide cuadrangular	Lado de la base : 10 cm Arista: 13 cm
b) Cono	Radio de la base: 3 cm Altura: 4 cm
c) Cilindro	Altura: 15 cm Diámetro de las bases: 8 cm
d) Paralelepípedo	Lados de las bases: 2 y 4 cm Altura: 8 cm
e) Esfera	Diámetro: 20 cm

4.4. Medidas de volúmenes

a) ¿Cómo se mide el volumen de un cuerpo geométrico?

Medir el volumen de un cuerpo geométrico significa asignar un valor al ***espacio ocupado por el mismo***. Como en el caso de cualquier medición, esto se consigue comparando ese espacio ocupado con el de una unidad de volumen. La unidad de volumen es la de un cubo cuya arista mida 1 unidad (u) de longitud (puede ser 1 cm, 1 m, etc.). Se dice que este ***cubo unitario*** tiene un volumen de 1 unidad cúbica (1 u^3).

Si se desea medir el ***volumen de un paralelepípedo*** como el de la figura, hay que averiguar cuántos cubos unitarios contiene; esto se puede conseguir dividiéndolo adecuadamente:



Luego, hay que contar ordenadamente el número de cubos unitarios. Para ello, procedemos a averiguar cuántos hay en un "piso", por ejemplo, el de la base, que tiene cinco filas de tres cubos (o tres filas de cinco cubos), lo que da un total de 15 cubos unitarios. Ahora, sólo falta contar cuántos "pisos" tiene el paralelepípedo: cuatro. Por consiguiente, el paralelepípedo de la figura contiene 60 cubos unitarios; su volumen es, pues, 60 u^3.

De aquí podemos inferir que si las dimensiones de las aristas del paralelepípedo son *a*, *b* y *c*, su volumen vendrá dado por: $\boldsymbol{V = a \times b \times c}$. Como un caso particular, el ***volumen de un cubo de arista a*** será: $\boldsymbol{V = a^3}$.

b) Las unidades para medir los volúmenes

Ya hemos mencionado que la unidad básica siempre es un cubo cuyo lado mide una unidad de longitud. Así se forman las unidades del ***sistema decimal de medidas de volumen***. Las que se utilizan habitualmente son:

Kilómetro cúbico	Km^3
Hectómetro cúbico	Hm^3
Decámetro cúbico	Dm^3
Metro cúbico	m^3
Decímetro cúbico	dm^3
Centímetro cúbico	cm^3
Milímetro cúbico	mm^3

La unidad fundamental de este sistema es el ***metro cúbico***, es decir, el volumen de un cubo cuya arista mide 1 m. Sus múltiplos aparecen sobre él en la tabla y sus submúltiplos, por debajo de él. El carácter decimal de este sistema significa que cada unidad de un orden dado equivale a 1.000 unidades del orden inmediatamente inferior; y que 1.000 unidades de cualquier orden equivalen a 1 unidad del orden inmediatamente superior.

18. a) ¿A qué equivale la milésima parte de un Km^3?

b) ¿Es cierto que la décima parte de un m^3 equivale a un dm^3?

c) ¿Por qué cantidad debe multiplicarse un Dm^3 para obtener un m^3?

d) ¿Es cierto que 100 cm^3 equivalen a 1 dm^3?

Junto con las unidades de volumen contamos con las ***unidades de capacidad***, propias para medir espacios "vacíos", susceptibles de ser llenados, por ejemplo, con ***líquidos***. La unidad fundamental suele ser el ***litro*** (1 l), que equivale al espacio ocupado por un dm^3. En contexto de medicinas suele utilizarse como unidad el ***centímetro cúbico*** (1 cm^3, que también suele representarse como 1 cc).

En la siguiente tabla se presentan las equivalencias entre las unidades de volumen y de capacidad más frecuentemente utilizadas:

Mirialitro	Ml	1 m^3
Hectolitro	Hl	
Decalitro	Dl	
litro	l	1 dm^3
decilitro	dl	
centilitro	cl	
mililitro	ml	1 cm^3

19. Complete la tabla siguiente:

La medida	**Equivale a**
a) 1,57 Hm^3	.... m^3
b) 3 m^3	 l
c) 175 Dm^3	.... Hm^3
d) 100 cc	 l
e) 3.000 cm^3	3 ....
f) 30 cl	.... cm^3
g) 0,01 m^3	.... dm^3
h) 650 m^3	0,65 ....
i) 500 l	0,5 ....
j) 0,003 m^3	.... Hl
k) 5.000 m^3	.... Hm^3
l) 400 Hm^3	.... Km^3
m) 250 cc	 l
n) 7,32 dm^3	7.320 ....
ñ) 2 Hl	.... dm3

También deben conocerse y valorarse las unidades de medida de volúmenes y de capacidad propias de nuestras culturas locales o regionales. Haga una recopilación de las más frecuentes y establezca su valor en términos de las unidades del sistema decimal.

Es muy importante saber ***estimar el volumen*** de diversos espacios y objetos que están en nuestro entorno. Para ello hay que poseer, primero, la capacidad de visualizar el "tamaño" de las unidades básicas y asociarlo a algún objeto familiar. Por ejemplo, la magnitud de 1 m^3, como un gran cajón cúbico de 1 m de lado; 1 dm^3, como el contenido de un empaque de 1 l de leche, agua o jugo; 1 cm^3, como un dado pequeño de jugar...

Estime (en la unidad que considere más pertinente en cada caso) el volumen o la capacidad de los siguientes espacios u objetos, y verifíquelo después, si es posible:

a) el aula de clase
b) algún armario presente en el aula
c) el edificio más grande de su localidad
d) un balde o tobo para cargar agua
e) un borrador para la pizarra
f) un estanque o pileta de agua
g) un morral para los útiles escolares
h) un autobús de alguna línea urbana
i) una fruta propia de su entorno
j) todo el ramaje de un árbol cercano
k) el tanque de agua de un baño o sanitario
l) el cuerpo de una persona determinada
m) un cerro cercano a la escuela
n) un dedal
ñ) el agua que puede recoger en el cuenco de sus dos manos.

c) Volumen de prismas y cilindros

El procedimiento que hemos utilizado para calcular el volumen de un paralelepípedo se puede extender al caso de los prismas y de los cilindros, ya que éstos comparten con aquél la siguiente propiedad: cualquier plano que corte al cuerpo perpendicularmente a las aristas (en el prisma) o a la generatriz (en el cilindro), da como intersección una figura congruente con la base respectiva (trate de visualizarlo...).

Así, podemos imaginar que el espacio interior de estos cuerpos (prismas y cilindros) puede ser generado por la figura de la base moviéndose en un "ascensor" perpendicular a dicha base a lo largo de la altura, y llenando ese espacio a cada paso con su propia figura. De aquí surge la idea de considerar el volumen de esos cuerpos como el resultado de multiplicar el área de la base por la altura del cuerpo. Así, pues, para estos dos tipos de cuerpos, el volumen viene dado por: ***V = área de la base x altura.***

20. Calcule el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:

Cuerpo geométrico	Medidas
a) Paralelepípedo	5 cm x 3,4 cm x 0,8 dm
b) Cilindro	Diámetro de las bases: 3 dm Altura: 12 cm
c) Prisma triangular	Lados de las bases: 3 x 4 x 5 cm Altura: 10 cm

d) Volumen de pirámides y conos

He aquí un experimento interesante: Ahora que ya sabe hacerlo, elabore dos plantillas, una para construir un prisma regular de cualquier base y de la altura que usted desee, y otra para construir una pirámide con la misma base y la misma altura del prisma anterior. Quite una base del prisma y también la de la pirámide. Llene la pirámide de arena o de otro material menudo y vacíela dentro del prisma; hágalo dos veces más (tres veces en total).

¿Qué ha descubierto? Que con el contenido (volumen) de tres pirámides de ésas acaba de llenar el prisma. En términos geométricos, el ***volumen de una pirámide*** es la tercera parte del volumen de un prisma que tenga la misma base y la misma altura de la pirámide considerada. Es decir, ***V = (área de la base x altura)/3***.

Indudablemente y por analogía, usted ha llegado ya a la siguiente conclusión: el ***volumen de un cono*** es la tercera parte del volumen de un cilindro que tenga la misma base y la misma altura del cono considerado. Es decir, ***V = (área de la base x altura)/3***. Pero si usted es como Santo Tomás, puede hacer la prueba para convencerse...

21. Calcule el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:

Cuerpo geométrico	Medidas
a) Pirámide de base rectangular	Lados de la base: 2 cm y 4 cm Altura: 8 cm

b) Cono	Diámetro de la base: 8 cm Altura: 12 cm
c) Pirámide triangular	Lados de las bases: 6 x 8 x 10 cm Altura: 20 cm
d) Cono	Diámetro de la base: 1 dm Generatriz: 13 cm

El volumen de los ***sólidos oblicuos*** responde a la misma fórmula que se utiliza en el caso de los respectivos cuerpos rectos: ***V = área de la base x altura (prismas y cilindros)***, o ***V = (área de la base x altura)/3 (pirámides y conos)***. En efecto, si los cuerpos oblicuos fueran flexibles y estuvieran llenos de arena o agua, podrían "enderezarse" y colocarse como rectos, sin alterar su volumen o capacidad interior. Si lo desea, puede verificarlo...

Y en cuanto al volumen de los ***troncos*** de prismas y cilindros (las bases no son paralelas) y al de los troncos de pirámides y conos de bases paralelas, dejamos al(a la) lector(a) que reflexione y llegue a la forma de calcularlos, cuando haga falta.

e) Volumen de la esfera

Aunque hay métodos matemáticos más avanzados para obtener la fórmula del volumen de una esfera, podemos referirnos también a los primeros métodos históricos empleados con ese mismo fin. Uno de ellos fue, como en los casos análogos de la circunferencia y del círculo, observar en esferas de distinto tamaño las relaciones existentes entre el volumen y el cubo de la medida de sus radios respectivos.

Así, se descubrió que si una esfera tenía un volumen V y un radio de medida r, la razón entre V y r^3 era constante en cualquier esfera y que el valor de esta razón era $(4 \times \pi)/3$. De este modo se llega a la expresión que proporciona el volumen de una esfera conocido su radio: $\boldsymbol{V = 4/3 \times \pi \times r^3}$.

Si obtenemos el volumen de un cilindro cuya base tenga un radio r y una altura $4/3 \times r$, llegamos a: $V = \pi \times r^2 \times 4/3 \times r$ expresión que, al ordenarse, nos lleva a: $V = 4/3 \times \pi \times r^3$. Análogamente, si obtenemos el volumen de un cono cuya base tenga un radio r, y una altura $4 \times r$, llegamos a: $V = (\pi \times r^2 \times 4 \times r)/3$ expresión que, al ordenarse, nos lleva también a: $V = 4/3 \times \pi \times r^3$.

Es decir, el volumen de una esfera de radio r es equivalente al volumen de:

- un cilindro cuya base tenga un radio de medida r, y de altura $4/3 \times r$
- un cono cuya base tenga un radio de medida r, y de altura $4 \times r$

Vamos a descubrir una propiedad muy importante de la esfera. Para ello, elaboramos primero la siguiente tabla:

Sólido de revolución	Medidas	Volumen	Área total
Esfera	Radio: r	$4/3 \times \pi \times r^3$	$4 \times \pi \times r^2$
Cilindro	Radio de la base: r Altura: $4/3 \times r$	$4/3 \times \pi \times r^3$	$14/3 \times \pi \times r^2$
Cono	Radio de la base: r Altura: $4 \times r$	$4/3 \times \pi \times r^3$	$(\sqrt{17} + 1) \times \pi \times r^2$

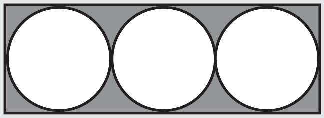
Al comparar las áreas totales de los tres cuerpos se observa que en todas ellas se multiplica $\pi \times r^2$ por sendos coeficientes: 4, 14/3 y $\sqrt{17}+1$; el menor valor de los tres es 4 (verifíquelo). Esto significa que la esfera es el sólido de revolución que "gasta" la menor cantidad de superficie externa para contener un volumen dado.

Y si se hace un estudio similar con los poliedros, comparados con la esfera, se llega a la misma conclusión. En definitiva, ***la esfera es el cuerpo geométrico que "gasta" la menor cantidad de superficie externa para contener un volumen dado.*** Esta propiedad puede enunciarse también de esta manera: ***la esfera es el cuerpo geométrico que contiene la mayor cantidad de volumen para una superficie externa dada.***

Hable con algún profesor de física y averigüe por qué las gotas de agua tienen forma esférica.

4.5. Algunos problemas referentes a medidas de los cuerpos geométricos

Tres pelotas de tenis están empacadas en un tubo cilíndrico, como se muestra en la figura. ¿Qué fracción del volumen del envase ocupan las tres pelotas?



Llamemos r al radio de las pelotas, que es el mismo radio de las bases del cilindro. El volumen de las tres pelotas es: $V_1 = 3 \times (4/3 \times \pi \times r^3) = 4 \times \pi \times r^3$. El cilindro tiene una altura equivalente a tres diámetros, es decir, $6 \times r$; su volumen viene dado por: $V_2 = \pi \times r^2 \times 6 \times r = 6 \times \pi \times r^3$. La relación entre ambos volúmenes es: $V_1 / V_2 = 4 \times \pi \times r^3 / 6 \times \pi \times r^3 = 2/3$. Las tres pelotas ocupan los 2/3 del espacio del envase cilíndrico.

Se desea construir una tienda de campaña de forma cónica; para ello se utiliza una pieza de lona de forma semicircular, tal que el segmento recto de la tela ya cortada tiene 8 m. Una vez instalada, ¿qué altura tendrá la tienda?; ¿cuántos m^3 de aire caben en ella?

Primero observamos la pieza de lona de forma semicircular; su radio mide 4 m y la longitud del semicírculo es $4 \times \pi$ m (¿por qué?). Para pensar en cómo construir la tienda, hay que tomar en cuenta que el punto medio de ese segmento recto se va a convertir en el vértice del cono y, de esta forma, la generatriz tendrá 4 m; los dos extremos de la línea de la semicircunferencia se unen para cerrar la base del cono en una circunferencia completa (trate de visualizarlo, o construya un modelo de papel a escala...).

Esta circunferencia completa de la base del cono mide $4 \times \pi$ m; su radio mide 2 m. En este momento se nos forma un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la generatriz, uno de los catetos es el radio de la base, y el otro cateto es la altura, cuyo valor necesitamos para calcular el volumen del cono. Aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos para la altura a: $a^2 = 4^2 - 2^2 = 12$; de donde, la altura: $a = \sqrt{12}$ m.

El volumen de la tienda será: $V = (\pi x 2^2 x \sqrt{12}) / 3m^3 = 14{,}5 m^3$.

El volumen de una esfera es $36 \times \pi$ u^3. ¿Cuánto mide su superficie? ¿Y una de sus circunferencias máximas?

En primer lugar, buscamos el valor del radio mediante la fórmula del volumen: $V = 4/3 \times \pi \times r^3$. De aquí: $36 \times \pi = 4/3 \times \pi \times r^3$, lo que nos lleva a $r^3 = 27$ u^3. Es decir, $r = 3$ u.

La superficie esférica medirá: $A = 4 \times \pi \times r^2 = 4 \times \pi \times 9 = 36 \times \pi$ u^2. Por su parte, una circunferencia máxima medirá: $L = 2 \times \pi \times r = 6 \times \pi$ u.

El área lateral de un cilindro es la mitad de su área total. ¿Cuál es la razón entre su altura y el radio de su base?

Si denominamos con r el radio de la base y con a la altura, el problema nos está pidiendo hallar, no los valores de a y de r, sino el valor de la razón a/r. Según el enunciado del problema, $A_t = 2 \times A_l$; es decir: $A_t = A_l + A_l$. Pero como $A_t = A_l + A_b$ (A_b representa el área de las dos bases), llegamos a: $A_l + A_l = A_l + A_b$; es decir, A_l y A_b deben ser iguales. Esto nos lleva a:

$2 \times \pi \times r \times a = 2 \times \pi \times r^2$ (¿por qué?)

$2 \times \pi \times r \times a = 2 \times \pi \times r \times r$ (¿por qué?)

$a = r$ (¿por qué?)

O lo que es lo mismo, $a/r = 1$; es decir, la altura y el radio de la base deben medir lo mismo (verifíquelo con cualquier ejemplo).

Si se dispone de 36 cubitos unitarios, ¿cuántos ortoedros, diferentes en su forma, pueden construirse con los mismos 36 cubitos? ¿Cuál de ellos tendrá la mayor área total? ¿Y la menor área total? ¿Y el menor volumen?

Este es un problema de divisibilidad...

Hay que ver todas las maneras de descomponer 36 en un producto de tres factores, entre los cuáles debe incluirse el 1. Estas diferentes maneras son: 1 x 1 x 36 (una fila con los 36 cubitos alineados); 1 x 2 x 18; 1 x 3 x 12; 1 x 4 x 9; 1 x 6 x 6; 2 x 2 x 9; 2 x 3 x 6; 3 x 3 x 4. Se pueden construir 8 ortoedros diferentes con los 36 cubos unitarios.

El ortoedro 1 x 1 x 36 tiene la mayor área total: 146 u^2. Y el ortoedro 3 x 3 x 4 la menor: 66 u^2. En cuanto al menor volumen, todos poseen el mismo: 36 u^3. Estamos en presencia de una transformación (cambiar la forma de los ortoedros) que conserva el volumen, pero no el área total

---

Si se le dan cuatro cortes a un cilindro, ¿se puede dividirlo en 12 partes congruentes?

Sí, si se hace bien. Por ejemplo, se pueden hacer tres cortes en forma paralela a la generatriz del cilindro, de tal manera que los círculos de la base queden divididos en seis sectores circulares congruentes, cada uno de ellos de 60º; con esto ya se tendrían 6 trozos congruentes del cilindro. Basta con hacer el cuarto corte paralelo a las bases, a mitad de la altura del cilindro.

Si en un cono el radio de la base y la altura miden lo mismo, ¿cuál es la razón entre el volumen y el área lateral?

Si llamamos a a esa medida común, tendremos: $V = 1/3 \times \pi \times a^2 \times a = 1/3 \times \pi \times a^3$. Para calcular el área lateral utilizamos la fórmula: $A_l = ½ \times g \times l$, donde g es la longitud de la generatriz del cono, y l es la longitud de la circunferencia de la base del cono, según vimos en un problema anterior.

Para obtener la longitud de la generatriz, acudimos al triángulo rectángulo formado por la altura y el radio de la base (catetos) y la generatriz g (hipotenusa). En él, aplicando el teorema de Pitágoras, obtenemos: $g^2 = a^2 + a^2 = 2 \times a^2$; de donde $g = \sqrt{2xa^2} = a \times \sqrt{2}$. Por otro lado, la longitud l de la circunferencia de la base es: $l = 2 \times \pi \times a$. Finalmente, el área lateral del cono es: $A_l = ½ \times g \times l = ½ \times a \times \sqrt{2} \times 2 \times \pi \times a = \sqrt{2} \times \pi \times a^2$.

La razón entre el volumen y el área lateral será: $\frac{V}{A_l} = \frac{\frac{1}{3}\pi a^3}{\sqrt{2}\pi a^2} = \frac{a}{3\sqrt{2}}$.

Tenemos un triángulo rectángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5 cm. Tomamos como eje de giro el cateto de 3 cm y, mediante una rotación completa, generamos un cono. Hacemos lo mismo con el cateto de 4 cm. ¿Son iguales los volúmenes de los dos conos? ¿Y las áreas laterales? ¿Y las áreas totales?

En el primer caso, los datos son: $r = 4$ cm; $a = 3$ cm ; $g = 5$ cm. Y en el segundo: $r = 3$ cm; $a = 4$ cm; $g = 5$ cm. Los volúmenes son: $V_1 = 1/3 \times \pi \times 4^2 \times 3 = 16 \times \pi$ cm^3; $V_2 = 1/3 \times \pi \times 3^2 \times 4 = 12 \times \pi$ cm^3. Por consiguiente, los volúmenes no son iguales.

En cuanto a las áreas laterales, $AL_1 = ½ \times g \times l = ½ \times 5 \times 2 \times \pi \times 4 = 20 \times \pi$ cm^2; $AL_2 = ½ \times g \times l = ½ \times 5 \times 2 \times \pi \times 3 = 15 \times \pi$ cm^2. Tampoco son iguales las áreas laterales.

Para calcular las áreas totales agregamos a las laterales el área de las bases respectivas y se obtiene: $AT_1 = 20 \times \pi$ cm^2 $+ 16 \times \pi$ cm^2 $= 36 \times \pi$ cm^2; $AT_2 = 15 \times \pi$ cm^2 $+ 9 \times \pi$ cm^2 $= 24 \times \pi$ cm^2. Tampoco son iguales las áreas totales.

Si en un paralelepípedo se duplica la longitud de todas sus aristas, ¿qué le ocurre a su área lateral? ¿Y a su volumen?

Puede tomar varios ejemplos para ayudarse y verá que el área lateral se multiplica por 4, y que el volumen se multiplica por 8. ¿Qué ocurre con el área y el volumen si esas longitudes se multiplican por 3? ¿Y si se multiplican por n?

Un globo esférico que permanecía estable se ha inflado más, de manera que su superficie se ha cuadruplicado. ¿Qué le ha ocurrido a su volumen?

Si el globo tenía inicialmente un radio r, su superficie medía $4 \times \pi \times r^2$. Si ahora su superficie se ha cuadruplicado, ha pasado a $16 \times \pi \times r^2$. La nueva esfera tiene un nuevo radio R; y su superficie viene dada por $4 \times \pi \times R^2$ y mide $16 \times \pi \times r^2$. Al igualar estas dos expresiones llegamos a: $R^2 = 4 \times r^2$; de ahí se sigue que $R = 2 \times r$, es decir, el radio de la nueva esfera es el doble del de la inicial. Si el radio se ha duplicado, el volumen se habrá multiplicado por 8 (¿por qué?).

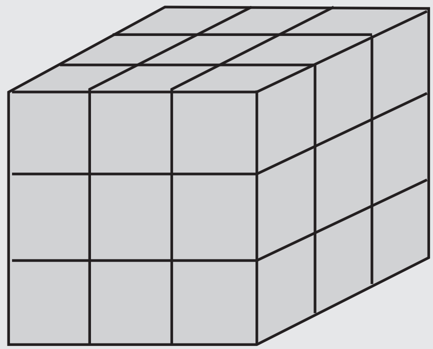
5. Y ahora, otros ejercicios "para la casa"...

22. ¿Cuál es el área total de un cubo cuyo volumen es de 8 dm^3?

23. El volumen de un cono es de 24 x π u^3; si el radio de su base mide 3 u, ¿cuánto mide su altura?

Calcule el volumen de la moneda de tamaño más grande que se utiliza en su país.

24. ¿Cuántos cubos, de cualquier tamaño, hay en la figura, si todos los cubitos son iguales?



25. Si en un cilindro,

a) el radio de las bases se duplica y la altura no varía, ¿qué le ocurre al área lateral?; ¿y al volumen?

b) el radio de las bases no varía y la altura se duplica, ¿qué le ocurre al área lateral?; ¿y al volumen?

c) el radio de las bases y la altura se duplican ambos, ¿qué le ocurre al área lateral?; ¿y al volumen?

26. De todos los paralelepípedos de 54 cm^2 de área total, ¿cuál es el que tiene mayor volumen?

27. Considere un cilindro cuya altura mide igual que el diámetro de la base, y que está inscrito (encajado) dentro de una esfera. ¿Qué fracción del espacio interior de la esfera ocupa el cilindro?

Suponga que la Tierra tiene forma esférica y que la línea del ecuador tiene 40.000 km. ¿Qué porcentaje de la superficie de la Tierra representa la extensión de su país?

28. Un cubo hueco y abierto en una cara, de 6 cm de lado, se llena con paralelepípedos de dimensiones 2 cm x 2 cm x 3 cm. ¿Con cuántos de éstos se puede llenar totalmente el cubo?

29. Seleccione la respuesta correcta: Si quiero duplicar el volumen de un cilindro:

a) duplico la altura y dejo igual el radio de las bases;

b) duplico el radio de las bases y dejo igual la altura;

c) duplico la altura y el radio de las bases;

d) duplico el diámetro de las bases y dejo igual la altura.

30. Agrupando 27 cubitos del mismo tamaño se construye un solo cubo más grande. Si este cubo se pinta todo de negro: a) ¿Cuántos de los cubitos no tendrán pintada de negro ninguna de sus caras? b) ¿Y una sola cara? c) ¿Y dos caras? d) ¿Y tres caras? e) ¿Puede haber algún cubito con más de tres caras pintadas?

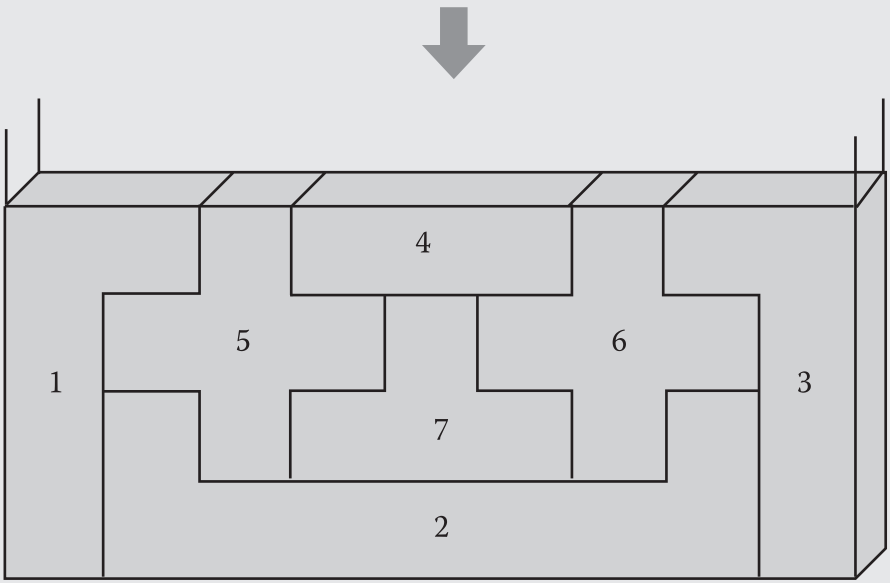
31. Las tres caras diferentes de un ortoedro miden 24, 32 y 48 cm^2, respectivamente. ¿Cuál es el volumen del ortoedro?

32. ¿Cuál es el orden en que no se pueden meter las piezas en la caja?

a) 2756413

b) 2751643
d) 2765314

c) 2763451
e) 2751634



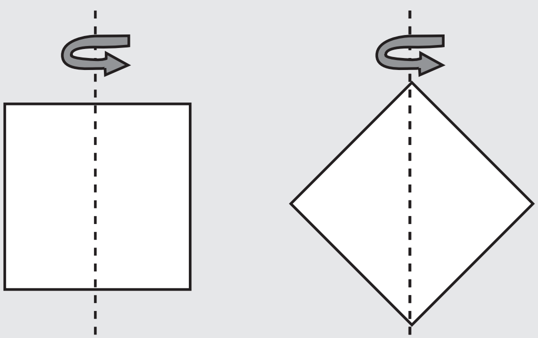
34. Un oso camina 1 km hacia el sur, luego 3 km hacia el oeste, y finalmente 1 km hacia el norte, llegando así a su punto de partida. ¿De qué color es el oso?

35. ¿Es posible construir una casa de planta rectangular que tenga sus cuatro fachadas orientadas hacia el sur? (a lo mejor tiene de vecino al oso del problema anterior...)

36. Un pez de 25 cm de longitud pesa 300 g. ¿Cuánto pesará otro pez de la misma especie que mide 50 cm de longitud?

¿Qué utilidad pueden encontrar las abejas en construir las celdas de sus panales con forma de prismas hexagonales? (disfrácese de abeja e intente averiguarlo...).

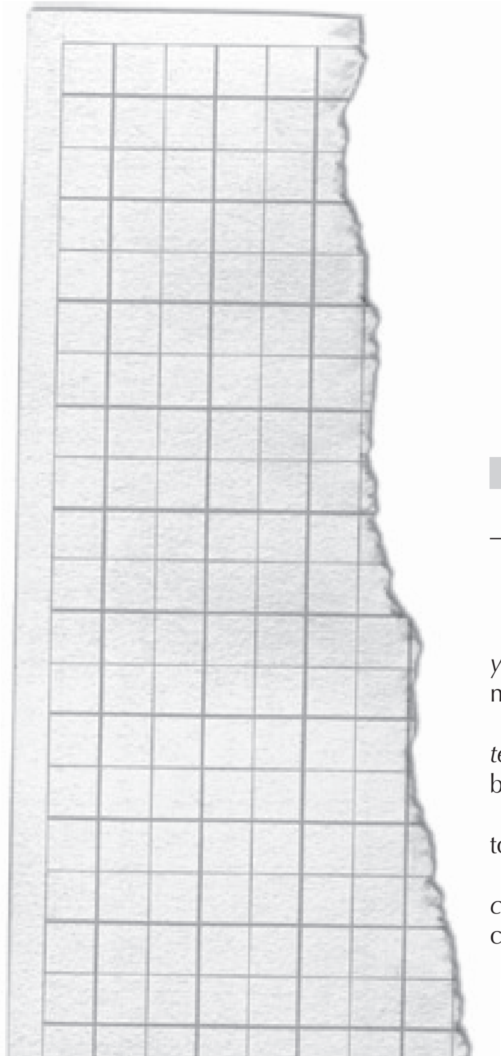
33. Dos rombos congruentes dan una rotación de 180º alrededor del eje que se indica en cada figura. Precise el sólido que se genera en cada caso y determine cuál de ellos posee mayor volumen.



Lea primero la Postdata y luego trate de resolver este problema imaginario. Desde un punto de nuestro continente, un aviador está a punto de iniciar su vuelo; de repente se le acerca un amigo y le pide que lo lleve a... Sin darle tiempo de decir su destino, el aviador le contesta: "Sube; esa parada no me va a desviar de mi ruta". ¿A dónde se dirige el aviador?

¿Qué sabe Ud. del cubismo como movimiento artístico del siglo XX?

He aquí una tarea interesante que puede realizar con sus alumnos. Se trata de fabricar una maqueta, a escala, del sistema planetario. Si construye la esfera de la Tierra con un diámetro de 1 cm, ¿qué diámetro debe asignarle a los otros planetas y al Sol? En esa misma escala, ¿a qué distancia debe ir colocando (puede ponerlos en un alambre recto que parte del Sol) los sucesivos planetas?; ¿qué distancia habrá, en la maqueta, entre el Sol y Neptuno? Y, por si acaso, ¿hay algún local de la escuela en el que puedan guardar esa maqueta sin doblar el alambre...?



Referencias electrónicas

- Benito, B. y Sánchez, J.C. (s. f.). *Áreas y volúmenes de figuras geométricas*. Disponible en: http://www.bbo.arrakis.es/geom/

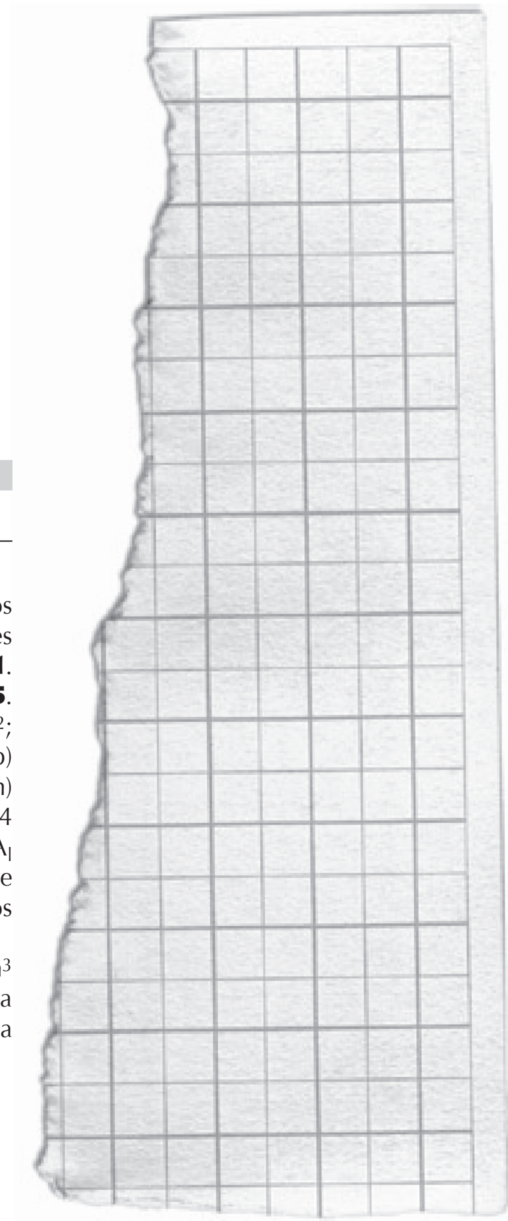
- Fendt, W. (2003). *Applets Java de Matemáticas. Los Sólidos Platónicos*. Disponible en:

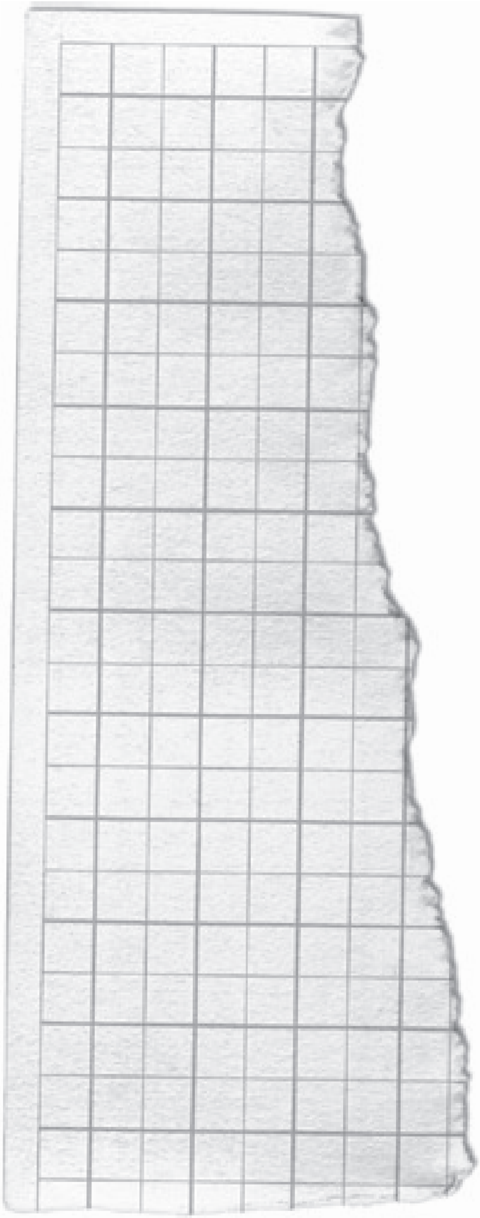
http://www.walter-fendt.de/m11s/platonsolids_s.htm

- Blanco, G. (2005). *Figuras geométricas*. Disponible en: http://www.kokone.com.mx/tareas/figuras/home.html

Respuestas de los ejercicios propuestos

1. 14 caras, 36 aristas, 24 vértices, 36 ángulos diedros **2**. 2 caras **3**. 4 ángulos diedros; 270º **4**. Los ángulos diedros no son todos congruentes **5.** No **6**. 18 pares 7. d), e) **8**. 6 pirámides; no quedan espacios vacíos **9.** 3 colores **10**. 15 caras **11**. Sí, con las tres **12**. Sí **13**. A, B y F **14**. Nº caras + Nº vértices = Nº aristas – 2 **15**. Nº; la diagonal mide 13 cm **16**. 12 cm **17**. a) 340 cm^2; b) 24 π cm^2; c) 152 π cm^2; d) 112 cm^2; e) 400 π cm^2 **18**. a) 1 Hm^3; b) No; c) 0,001; d) No **19**. a) 1.570.000; b) 3.000; c) 0,175; d) 0,1; e) dm^3; f) 300; g) 10; h) Dm^3; i) m^3; j) 0,03; k) 0,005; l) 0,4; m) 0,25; n) cm^3; ñ) 200 **20**. a) 136 cm^3; b) 2,7 π dm^3; c) 60 cm^3 **21**. a) 64/3 cm^3; b) 64 π cm^3; c) 160 cm^3; d) 100 π cm^3 **22**. 24 dm^2 **23**. 8 u **24**. 36 cubos **25**. a) A_l se duplica y V se cuadruplica; b) A_l se duplica y V se duplica; c) A_l se cuadruplica y V se multiplica por 8 **26**. El cubo de 3 cm de arista **27**. $\frac{3}{4\sqrt{2}}$ **28**. 18 paralelepípedos **29**. a) **30**. a) 1 cubito; b) 6 cubitos; c) 12 cubitos; d) 8 cubitos; e) No **31**. 192 cm^3 **32.** c) **33**. Izquierda: cilindro; derecha: dos conos unidos por la base. El sólido de la izquierda **34**. Blanco **35**. Sí, si el punto geográfico del Polo Norte queda dentro de la casa **36**. 2,4 kg





Postdata: ¿Hay más de una geometría?

Hasta ahora hemos visto una geometría (una “medida de la Tierra”) que versa sobre puntos, líneas, ángulos, planos, superficies y cuerpos, con las relaciones que se dan entre ellos y las fórmulas correspondientes. Esta ***geometría*** se denomina ***euclídea*** en razón de que sus planteamientos, sus postulados y su forma de construirse se gestaron en buena medida dentro de la cultura griega y quedaron plasmados en los Elementos de Euclides.

Tres de los resultados “estrella” de esta geometría son: “dados dos puntos, sólo hay una línea recta que los une”, “por un punto exterior a una recta sólo puede trazarse una paralela a la misma” y “la suma de la medida de los ángulos de un triángulo es 180º”. Quizá parezca irreverente poner en duda estas afirmaciones, pero no es nada descabellado: depende de dónde estemos parados.

Por ejemplo, si usted está en una de las esquinas de una manzana de viviendas en cualquier ciudad o pueblo y quiere hallar el camino más corto para ir a la esquina opuesta de esa manzana, no se le ocurrirá decir que va a ir en línea recta; el camino más corto va por la acera, bordeando la manzana. Y si la manzana tiene planta rectangular hay, no uno, sino dos caminos más cortos para unir esas dos esquinas. Este resultado es inconcebible en la geometría euclídea.

Ese tipo de geometría es el que nos rige en nuestra vida corriente como habitantes urbanos; es, por ejemplo, la geometría habitual de los conductores de taxis y carros, quienes se las ingenian a cada momento para resolver el problema de los caminos más cortos (es decir, los que consumen menos tiempo) para ir de un punto a otro en una ciudad. El espacio de una ciudad, para los efectos de desplazarse por ella, se rige por una ***geometría no euclídea.***

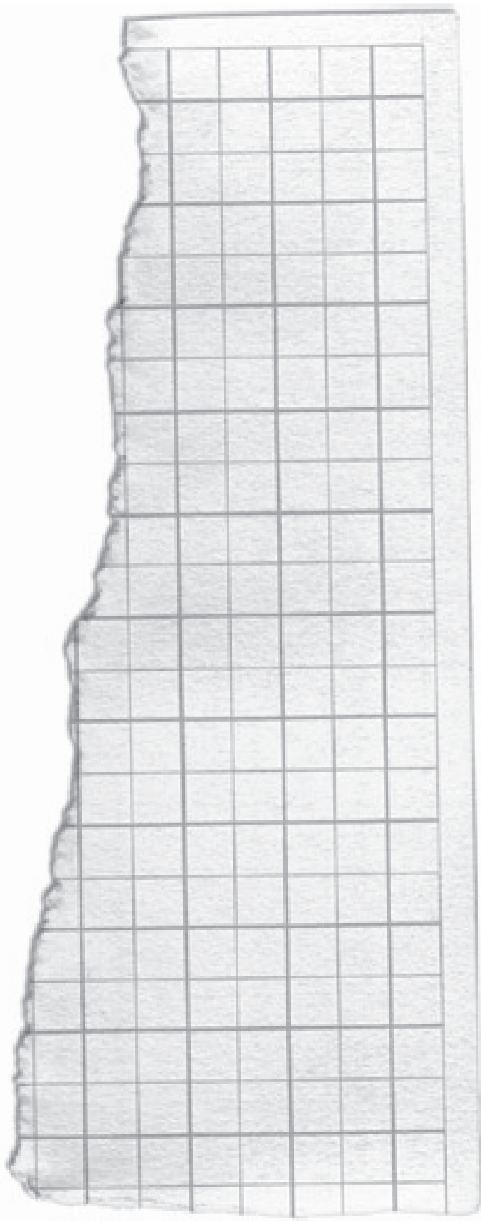
Vayamos ahora a otro tipo de espacio, el de una superficie esférica. Sobre ella no hay rectas, entendidas tal como las hemos estudiado en los Cuadernos anteriores, porque todas las líneas que trazamos se van curvando. Pero ¿qué líneas hacen aquí el papel de rectas, en el sentido de representar el camino más corto entre dos puntos de esa superficie? Esas líneas son las circunferencias máximas (puede verificarlo sobre una esfera...). Así, las distancias entre dos puntos se miden sobre una circunferencia máxima que pase por los dos puntos.

Más aún; si Ud. está en el Polo Norte (en la casa del Problema **35**.) y desea irse al Polo Sur (en avión, claro), ¿cuál es la ruta más corta a seguir? Pues puede desplazarse por cualquier meridiano. ¿Cuántas "líneas rectas" o caminos más cortos unen los dos polos? Pues ya no hay "sólo" dos, como en el caso de la vuelta a la manzana, sino infinitas. Este resultado también es inconcebible en la geometría euclídea.

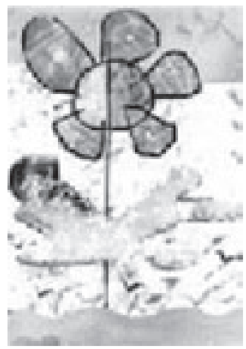
Y hay todavía más. Por paralela a una recta entendemos cualquier otra recta que no corte nunca a la primera. También hemos visto que en una superficie esférica, las "rectas" son las circunferencias máximas. Si ahora consideramos una recta como la línea ecuatorial, y un punto como el que puede representar a la ciudad de La Paz, ¿cómo se traza una "recta paralela" al ecuador por ese punto? Pues no se puede, porque las "rectas" que pasan por La Paz tienen que ser todas circunferencias máximas, y todas las que se pueden trazar cortan en algún punto al ecuador (haga la prueba sobre un globo terráqueo... Y ojo, el "paralelo" que pasa por La Paz no es un círculo máximo y, por lo tanto, no es la "recta paralela" que estamos buscando).Otro resultado inconcebible en la geometría euclídea.

Y otro más. Como es fácil de observar, el ángulo que forma cualquier meridiano con cualquier paralelo mide 90º. Sobre esta base, suponga que vuelve a salir del Polo Norte hasta Quito, toma ahora la línea ecuatorial y se desplaza como un cuarto de la circunferencia terrestre, y se regresa derechito al Polo Norte. Su trayectoria ha formado, sobre la superficie esférica, un gran triángulo de líneas curvas. ¿Cuánto mide cada uno de sus ángulos? La respuesta es fácil: 90º. ¿Y la suma de sus medidas? No se asombre: 270º.

De estos dos casos de contextos o espacios, el de los desplazamientos y medidas en una ciudad y en una superficie esférica, se desprende un hecho clave: ***todo "espacio" puede tener su propia geometría si en él se define adecuadamente una medida, una forma de medir.*** En definitiva, en los Cuadernos hemos estudiado una geometría, la euclídea, pero hay otras muchas más. Ánimo...



Índice



FE Y ALEGRIA